
现代数学基础丛书
随机分析学基础
(第二版)



现代数学基础丛书

随机分析学基础

（第二版）

黄志远　著

科学出版社

2001

内容简介

本书在一般测度论观点下的概率论和随机过程初步知识的基础上，介绍了随机分析学的基础及较新成果. 全书分五章：第一章是预备知识，包括随机过程一般理论和鞅论初步；第二章是近代随机积分理论；第三章讨论连续半鞅的随机微分、伊藤公式及其应用；第四章介绍随机微分方程的现代理论；第五章是 Malliavin 随机分析.

本书可作为高等院校概率论及有关领域的研究生教材，也可作为有关专业研究工作者和高等院校有关专业教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机分析学基础(第二版)/黄志远著. —北京：科学出版社，2001.3

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008750-X

Ⅰ. 随… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 随机过程 Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 42740 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2001 年 3 月第一次印刷 印张：11¼

印数：1—3 500 字数：291 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换(北燕))

第 二 版 序

本书第一版出版至今已过去了 12 年. 10 多年来, 随机分析学的理论获得了巨大的发展, 其应用领域日益广泛, 和数学各分支的联系也日益密切, 因此, 受到了众多研究领域学者的关注. 本书曾被许多大学和科研院、所选为研究生教材或参考书, 为了适应读者需要, 作者在第一版的基础上作了修订. 主要是对 Malliavin 随机分析部分 (第五章) 作了较大的修改, 例如对 Meyer 不等式及 Hörmander 定理分别采用了 Pisier 及 Norris 提出的简洁的证明. 此外, 还增加了像 Burkholder-Davis-Gundy 不等式等重要内容, 改正了第一版中的某些错误, 补充了一些最新的参考文献.

本书新版改由科学出版社出版, 并得到了国家自然科学基金 (项目编号 19631030) 及中国科学院科学出版基金的资助. 从第一版到第二版的写作过程中, 作者始终得到王梓坤、严加安、马志明院士和齐民友、梁之舜、侯振挺教授等的关心和支持, 严加安院士和任佳刚教授提出了许多宝贵的意见, 特此表示感谢.

黄志远

2000 年于华中科技大学

第 一 版 序

这本书是作者在 1984 年及 1987 年两次为武汉大学数学系研究生讲课的讲稿基础上形成的. 随机分析学是近代概率论中最活跃的分支之一. 它的发展十分迅速, 内容也极其丰富. 为了力图做到在不需要很多准备知识的基础上, 以较短的篇幅, 介绍这一分支的核心内容和发展主流, 作者选择了从伊藤随机分析到 Malliavin 随机分析这一历史的和逻辑的发展线索, 在作者工作的基础上重新改写了随机积分这一章, 并增加了 Malliavin 随机分析的内容. 在写作过程中, 和 K. Itô (伊藤清) 、 P. Malliavin 、 P. A. Meyer 、 S. Watanabe (渡边信三) 以及其他一些国内外概率论学者的讨论曾给作者以很大的启发, 并参考了 H. Kunita (国田宽) 关于随机流以及 I. Shigekawa (重川一郎) 关于 Malliavin 随机分析的讲义. 中国科学院应用数学研究所研究员严加安同志仔细审阅了全部书稿, 并提出了许多宝贵意见, 作者在此深表谢意. 但由于作者水平、所涉及的主题及篇幅所限, 本书没有包括像极限理论、边界理论、稳定性理论等重要内容, 也不能全面地反映国内同志在这一领域的许多工作, 缺点和错误在所难免, 衷心希望读者批评指正.

黄志远

1988 年 1 月于武汉大学

目　　录

引　　论

概率论在它发展的早期，和分析是两个迥然不同的领域，一些人甚至认为，概率论是否是数学或物理学的一部分还是一个疑问. 直到 1933 年 Kolmogorov 建立了概率论的公理基础，才使它成为一个严密的数学分支. 此后又有些人认为，概率论不过是分析的一部分，它的任何命题都可以翻译成分析的语言，因而不存在什么单独的概率方法，科学历史的发展证明这种观点是完全错误的. 本世纪 40 年代到 50 年代间，这两个领域之间的关系发生了一个戏剧性的变化：如果说以前人们关心的是如何用分析方法来解答概率问题，那么在这以后更感兴趣的是如何用概率方法来解决分析问题. 在它们之间迅速地发展着一门新的学科 —— **随机分析学**.

那么，什么是概率方法？它解决分析问题的奥妙何在？我们最好先考察几个典型的例子.

例 1 证明连续函数可以用足够高次的多项式均匀逼近 (Weierstrass 定理).

这是一个纯分析的命题. 1912 年 Bernstein[1] 基于概率的想法构造了这种多项式：设 $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, 考虑其成功概率为 x 的 n 次 Bernoulli 试验，其成功次数 S_n 服从二项分布，由大数定律 S_n/n 依概率收敛于 x, 因而 $f(S_n/n)$ 依概率收敛于 $f(x)$. 但

$$\begin{aligned} E[f(S_n/n)] &= \sum_{k=0}^{n} f(k/n)P(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

为一 n 次多项式，记为 $p_n(x)$. 设 M 为 $|f(x)|$ 之上界，对任给 $\varepsilon > 0$

可选 $\delta > 0$ 使当 $|y-x| < \delta$ 时有 $|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}|p_n(x)-f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right]\right| \\ &\le 2MP\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right| \ge \delta\right\}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right| \ge \delta\right\} &\le \delta^{-2}\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \delta^{-2}n^{-1}x(1-x) \\ &\le \frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

因而可选 n 足够大 (不依赖于 x) 使 $M/n\delta^2 < \varepsilon$, 这样就证明了均匀逼近性质.

当然我们可以不用概率语言而用纯分析语言来定义这种多项式, 把期望改成求和或积分, 用纯分析方法给出证明. 但是, 这样一来, 隐藏在概率语言后面的那种为概率论所特有的思维方式却无法翻译过来, 因而使得在概率论看来十分自然的东西却变得莫明其妙.

例 2 构造一个处处不可微的连续函数.

在很长一段时间里, 分析学家们相信连续函数一般都可微, 只可能在某些特殊的与孤立的点有例外. 1872 年 Weierstrass 构造了一个处处连续但处处不可微的函数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n),$$

其中 $\lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|\lambda_n > 0$. 1904 年 Von Koch 给出了这种曲线的几何构造. 而对于这类函数性质的研究, 至今仍延绵不断.

然而我们知道, 早在 1827 年, 英国植物学家 Brown 就在显微镜下观察到了花粉粒子在静水中的奇怪的不规则的运动. 1905 年,

Einstein 对这种现象作了物理解释. 1923 年, Wiener[1] 构造了它的数学模型, 这就是我们现在称之为 **Brown 运动** 或 **Wiener 过程** 的随机过程.

按照 Wiener 的定义, 一维 Brown 运动 $W = \{W(t), t \geq 0\}$ 是具有以下性质的随机过程:

1° $W(0) = 0$;

2° $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \{W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ 为相互独立随机变量族;

3° $0 \leq s < t \Longrightarrow W(t) - W(s)$ 服从正态 $N(0, \sigma^2(t-s))$ 分布, 其中 $\sigma > 0$ 为一常数.

当 $\sigma^2 = 1$ 时, 称为标准 Brown 运动 (或简称为 Brown 运动). 取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 d 维随机过程 $W(t) = (W^1(t), W^2(t), \cdots, W^d(t))$, 若 $\{W^j(t), t \geq 0\}_{j=1,2,\cdots,d}$ 为 d 个相互独立的一维 Brown 运动, 称为 d 维 Brown 运动.

在今天, Brown 运动已不仅是花粉粒子运动的模型, 它描述了像热电子运动、通信噪声、市场价格波动以及许多动态系统的随机干扰等等物理现象, 它的轨道的分析性质也是许多分析家注意的对象.

例如考察一维 Brown 运动, 由性质 3° 可知

$$\mathbb{E}[|W((t) - W(s)|^4] = 3|t-s|^2,$$

根据著名的 Kolmogorov 定理, 存在等价的随机过程, 其一切轨道为连续函数. 今后, 我们所说的 Brown 运动均指这样的连续过程. 现在我们要证明 Brown 运动几乎所有轨道是处处不可微的连续函数.

为叙述简单起见, 只考虑 [0,1] 区间. 若轨道 $W(\cdot, \omega)$ 在某点 $t \in [0,1)$ 可微, 必然在 t 点存在有限的右导数, 因而存在足够大的正整数 m 及 k, 使 $|W(t+h,\omega) - W(t,\omega)| \leq mh$ 对一切 $h \in \left[0, \frac{1}{k}\right)$ 成立. 令

$$A(m,k) \equiv \{\omega; \quad \exists t \in [0,1), \quad \forall h \in [0, 1/k),$$

$$|W(t+h,\omega)-W(t,\omega)|\leq mh\},$$

于是，“至少在某点 $t\in[0,1)$ 处可微”的轨道集合含于集合 $\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A(m,k)$ 之中. 此集合未必可测，为证几乎所有轨道的处处不可微性，只要证明对一切正整数 m 及 k，存在一个包含 $A(m,k)$ 的零概率集合 $B(m,k)$.

设 $n\geq 4k$，将 [0,1) 区间 n 等分. 若 $\omega\in A(m,k)$，则必有 $t\in\left[\frac{i-1}{n},\quad \frac{i}{n}\right)$ 对某个 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立，且对 $j=0,1,2$ 均有

$$\begin{aligned}&\left|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)\right|\\&\leq\left|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)-W(t,\omega)\right|+\left|W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)-W(t,\omega)\right|\\&\leq\left(\frac{j+2}{n}\right)m+\left(\frac{j+1}{n}\right)m=\left(\frac{2j+3}{n}\right)m.\end{aligned}$$

因为当 $n\geq 4k$ 时，上述区间最大者 $\left[t,\quad \frac{i+3}{n}\right)$，其长度不超过 $\frac{1}{k}$. 记

$$\begin{aligned}C(i,m,n)\equiv\bigcap_{j=0}^{2}\Big\{\omega;&\left|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)\right.\\&\left.-W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)\right|\leq\left(\frac{2j+3}{n}\right)m\Big\},\end{aligned}$$

$$B(m,k)\equiv\bigcap_{n=4k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}C(i,m,n),$$

则 $B(m,k)$ 为可测集，且 $B(m,k)\supset A(m,k)$.

为计算 $C(i,m,n)$ 之概率，利用 Brown 运动的性质 2° 及 3°，由于 $W\left(\frac{i+j+1}{n}\right)-W\left(\frac{i+1}{n}\right)$ 为正态 $N(0,n^{-1})$ 分布，除以 $n^{-1/2}$ 后为标准正态分布，其绝对值不超过 ε 之概率最多是 ε，故

$$P\{C(i,m,n)\}\leq 3\cdot 5\cdot 7\cdot m^3n^{-3/2},$$

$$P\{B(m,k)\}\leq\lim_{n\to\infty}(3\cdot 5\cdot 7m^3n^{-1/2})=0,$$

这就证明了几乎所有轨道的处处不可微性. 由于有界变差函数几乎处处可微, 因而其几乎所有轨道在任一有限区间上的变差都是无界的. 此外, Brown 运动的轨道还有许多有趣的分析性质: 例如其零点集合为一完备疏朗集, 具有连续统的势但其 Lebesgue 测度为 0 (如同 Cantor 集合那样); 当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时它是 α-Hölder 连续; 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 它不是 α-Hölder 连续. 对几乎所有 ω, 有

$$\overline{\lim}_{t\downarrow 0} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log(t^{-1})} = 1, \tag{0.1}$$

$$\underline{\lim}_{t\downarrow 0} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log(t^{-1})} = -1, \tag{0.2}$$

$$\overline{\lim}_{t\uparrow\infty} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log t} = 1, \tag{0.3}$$

$$\underline{\lim}_{t\uparrow\infty} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log t} = -1. \tag{0.4}$$

而且有如下的 Fourier 展式:

$$\begin{aligned} W(t,\omega) =& t\xi_0(\omega) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\xi_k(\omega)\frac{(\cos 2k\pi t - 1)}{2k\pi} \\ &+ \eta_k(\omega)\frac{\sin 2k\pi t}{2k\pi}\Big] \qquad (0 \le t \le 1), \end{aligned} \tag{0.5}$$

其中 $\{\xi_0, \xi_1, \cdots; \eta_1, \eta_2, \cdots\}$ 为相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量序列. 有关 Brown 运动轨道性质的详尽讨论, 读者可参看 Itô-Mckean[1] 或 Hida[1]. 有趣的是, 表示式 (0.5) 和 Weierstrass 构造的函数颇为相似.

例 3 构造某些数学物理方程边值问题的显式解.

当 Brown 1827 年在显微镜下发现花粉粒子的奇怪运动时, 他没有料到在下一世纪, 这种现象竟给数学和物理学的许多分支的发展以强有力的刺激和推动.

我们知道, Brown 运动是一个马氏过程. d 维 Brown 运动 W 的转移概率密度

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp\{-|x-y|^2/2t\}$$

$$(t > 0; \qquad x, y \in \mathbb{R}^d) \tag{0.6}$$

正好是热方程

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) \tag{0.7}$$

的基本解. 对 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 函数

$$u(t, x) \equiv \mathbb{E}[f(W(t) + x)] \tag{0.8}$$

是方程 (0.7) 的 Cauchy 问题:

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{0.9}$$

的唯一解. 这样, 人们就得到了纯分析问题的解的概率表示. 再考虑 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G, \end{cases} \tag{0.10}$$

其中 G 是 $\mathbb{R}^d$ 中某个区域, ∂G 为其边界, φ 为定义在边界上的某个函数. 问题是要寻求这样的函数 $u(x)$: 它在 G 内调和, 在 $G \cup \partial G$ 连续且当 x 趋于边界点 $x_0 \in \partial G$ 时有 $u(x) \longrightarrow \varphi(x_0)$. 一般说来, 甚至当 φ 在 ∂G 上有界连续时, 问题也不一定有解; 若解存在, 除非 G 为有界区域, 也可能不唯一. 而利用 Brown 运动作为工具, 可以研究任意开集 G 中的 Dirichlet 问题, 且允许 φ 在 ∂G 的一个很小的集合 (这个集合 Brown 运动的轨道实际上不能达到) 上不连续.

设 $x \in G, \tau_x$ 为自 x 出发的 d 维 Brown 运动 $W(t) + x$ 首次到达边界 ∂G 的时刻. 那么, 在关于边界及边界函数相当宽的条件下可以证明函数

$$u(x) \equiv \mathbb{E}[\varphi(W(\tau_x) + x)] \tag{0.11}$$

是 Dirichlet 问题 (0.10) 的唯一解.

以上事实揭示了 Brown 运动和古典位势理论的深刻联系. 利用 Brown 运动的轨道, 可以构造出与 Laplace 算子 Δ 有关的许多

不同边值问题的显式解. 人们自然要问, 对于一般的二阶椭圆微分算子:

$$L \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)\partial_i \tag{0.12}$$

是否有类似的结果呢? 正是这个问题, 引导到 20 世纪 40 年代日本数学家伊藤清 (K. Itô) (参看 Itô[1,2], 与此同时还有前苏联数学家 Gihman[1]) 创立随机积分和随机微分方程的理论. 在那里, 代替 Brown 运动的是一般的扩散过程, 它是以下随机方程的解:

$$X^i(t) = x_i + \int_0^t b^i(X(s))ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j^i(X(s))dW^j(s)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m), \tag{0.13}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in R^m$, $W(t) = (W^1(t), \cdots, W^d(t))$ 为 d 维 Brown 运动, 矩阵 $\sigma(x) = (\sigma_j^i(x))_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ 为矩阵 $a(x) = (a^{ij}(x))_{1\le i,j\le m}$ 的平方根: $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^*$. 在系统满足一定条件时, (0.13) 存在唯一解 $X(t) = (X^1(t), \cdots, X^m(t))$, 它是轨道连续的 m 维强马氏过程, 以 L 为生成算子, 称为 $L-$ 扩散过程. 特别当 $m = d$, $b^i(x) = 0$, $a^{ij}(x) = \delta_{ij}$ 即 $a(x) = I$(单位矩阵) 时, L 化为 $\frac{1}{2}\Delta$, $X(t)$ 就是自 x 出发的 m 维 Brown 运动.

伊藤随机分析提供了直接构造 L- 扩散过程轨道的方法, 因而得到了与二阶椭圆微分算子 L 有关的许多问题的概率解, 在处理具有退化、无界或不光滑系数的椭圆、抛物型方程时, 更显出它的优越性. 例如 Freidlin[1,2] 关于具有无界系数的退化椭圆、抛物型方程在无界区域中的边值问题可解性的结果, Krylov[1,2] 关于 Bellman 型非线性抛物与椭圆型方程的理论, 都是应用概率方法研究分析问题的范例. 特别是 1976 年法国数学家 P.Malliavin[2] 建立了一套对 Brown 运动轨道泛函的微分运算, 创立了 **随机变分学**(Malliavin calculus, 或称 **Malliavin 随机分析**), 用概率方法证明并改进了关于偏微分算子亚椭圆性的著名的 Hörmander 定理, 开辟了用概率方

法解决分析问题的一个崭新领域，成为随机分析发展史上一个新的里程碑.

为何概率方法有如此的威力？其主要原因之一在于它的明显的直观性．分析中处理的宏观量常常是物理中微观量的统计平均，这些微观量比宏观量更接近物理实际．然而概率的直观又不同于物理的直观，它是建立在严格的数学基础之上的，它不仅启发人们的思维，引导到新的发现，而且它的证明也是十分严格的．可以说，概率方法是兼有物理直观性和数学严密性的一种科学分析方法.

随机分析学，按照伊藤清 [6] 的说法，是“增添了随机风趣的分析学”．在他被授于 1987 年 Wolf 数学奖时，对他的贡献的评价是：“他使我们对 Markov 样本路径的无穷小发展有了一个完全的认识．他的随机分析可以看作随机王国中的牛顿定律，它提供了支配自然现象的偏微分方程和隐藏着的概率机制之间的直接翻译过程，其主要成分是对 Brown 运动的函数的微分和积分运算，由此而产生的理论是近代纯粹与应用概率论的基石．” (Notices of AMS, Vol.34, No.2, p.286, 1987)．因此，也可以说，随机分析学是关于随机函数 (或随机过程) 轨道的无穷小分析学.

研究随机过程，有三种不同的观点：

一、按古典的定义，随机过程 $X=\{X_t(\omega), t\in T\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一族随机变量．这里 T 是实数轴 $\mathbb{R}$ 中的子集，一般是正整数集或区间．每固定 $t\in T$, 得到一个随机变量 $X_t(\cdot)$．若以 $L^0(\Omega)$ 表示由全体随机变量所构成的线性空间，并在其中定义准范数：

$$\|\xi\|_{L^0}\equiv \mathbb{E}[|\xi|\wedge 1], \tag{0.14}$$

则 $L^0(\Omega)$ 为一 Fréchet 空间．因此，一个随机过程可以看作 **定义于 T 上取值于 $L^0(\Omega)$ 的抽象函数**．由于在 $L^0(\Omega)$ 中对 a.s. 相等的随机变量不加区别，所以在这种观点下，若过程 $X=\{X_t, t\in T\}$ 和 $Y=\{Y_t, t\in T\}$ 满足：

$$P\{X_t=Y_t\}=1, \qquad \forall t\in T, \tag{0.15}$$

就称 X 与 Y**随机等价**或互为**修正**. 在这种观点下，对随机过程的微积分运算即取值于线性拓扑空间的抽象函数的微积分运算. 其中特别常见的情形是所谓二阶矩过程，即取值于 $L^2(\Omega)$ 的抽象函数，这里 $L^2(\Omega)$ 是二阶矩存在的随机变量 (等价类) 所构成的 Hilbert 空间，其中内积由

$$(\xi, \eta)_{L^2} \equiv \mathbb{E}[\xi\eta] \tag{0.16}$$

定义. 因此，二阶矩过程不外是 Hilbert空间$L^2(\Omega)$中的一条曲线. 按这种观点发展的一套微积分学就是所谓均方微积分. 然而，从本质上说来，它只是泛函分析的一部分，没有什么“随机风趣”, 因此我们不打算在本书中介绍.

二、随机过程 $X = \{X_t(\omega), t \in T\}$, 每固定 $\omega \in \Omega$, 得到一个普通的实函数 $X_\cdot(\omega)$, 称为**样本函数**或**轨道**, 若以 $\mathbb{R}^T$ 表示定义在 T 上的实值函数全体所构成的空间，即无穷维乘积空间，以 $\mathcal{B}^T$ 表示其乘积 $\sigma-$ 代数，则过程 $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ 可以看作一个**取值于可测空间**$(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ **的随机变量**. 在这种观点下，相应于随机变量的 a.s. 相等和同分布，随机过程也有两种不同的等价性：

1° 若过程 X 与 Y 几乎所有样本函数重合，即

$$P\{X_t = Y_t, \ \forall t \in T\} = 1, \tag{0.17}$$

则称 X 与 Y**无区别**.

随机过程 X 既然作为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 到 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ 的可测映象，它就在 $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ 上产生一个概率测度：

$$\widehat{\mu}_X(B) \equiv P \circ X^{-1}(B) \equiv P\{\omega; X_\cdot(\omega) \in B\}, \qquad B \in \mathcal{B}^T, \tag{0.18}$$

称为 X 的分布.

2° 若过程 X 与 Y 有相同的分布： $\widehat{\mu}_X = \widehat{\mu}_Y$, 则称 X 与 Y**弱等价**.

由 Kolmogorov 构造定理可知，过程的分布由其有限维分布族所唯一确定，因此， X 与 Y 弱等价也就是 X 与 Y 具有相同的有限维分布族. 显然，若 X 与 Y 无区别，必随机等价，因而弱等价，

但反过来一般不成立. 在最弱的等价意义下, 随机过程可以看作**函数空间上的概率测度**.

从有限维空间 $\mathbb{R}^n$ 推广到无穷维空间 $\mathbb{R}^T$, 至少出现两点本质的困难:

1° 当 T 为不可列集合时, 许多我们感兴趣的集合 (例如集合 $[\omega; \sup_{t\in T} X_t(\omega) \le \lambda]$ 以及所有连续函数的集合 $C(T)$ 等) 都未必可测. 克服这种困难的办法, 一般是寻找一个等价的过程, 其分布集中在 $\mathbb{R}^T$ 的某个子集上, 使这些感兴趣的集合与子集的交集只依赖于可数坐标, 因而一般为可测集. 例如 Doob[1] 的可分修正或连续修正方法, 就是寻找这样的等价过程, 使其所有样本函数为可分或连续. 在 Brown 运动情况下, 我们得到的分布 $\mu = \widehat{\mu}_W$ 完全集中在连续函数空间 $C(T)$ 上, 称为 **Wiener 测度**. 有时 (例如 Poisson 过程) 不存在连续修正, 我们就考虑其 "右连左极修正", 即分布完全集中在右连续且存在有限左极限的函数空间 $D(T)$ 上的等价过程.

2° $\mathbb{R}^n$ 中的分布, 重要的是所谓绝对连续分布, 其分布密度也就是关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数. 而在无穷维空间中没有像 Lebesgue 测度那样的参考测度, 因而无法定义其密度. 但我们常常可以把所感兴趣的随机过程表示成某个基本随机过程轨道的泛函. 例如方程 (0.13) 的唯一解 $X(t)$ 就是 Brown 运动过程 $W(t)$ 的泛函. 为简单起见考虑一维情形. 令 $\mathcal{W} \equiv C_0(\mathbb{R}_+)$ 为定义在 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 上满足 $w(0) = 0$ 的连续函数 $w(t)$ 全体所构成的线性拓扑空间, 若在其中定义准范数:

$$\|w\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\sup_{0\le t\le n} |w(t)| \wedge 1 \right), \qquad w \in \mathcal{W}, \tag{0.19}$$

则 $\mathcal{W}$ 构成 Fréchet 空间 (按此拓扑收敛即在任一有限区间均匀收敛). 以 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{W})$ 表示其 Borel σ- 代数, $\mu = \widehat{\mu}_W$ 为其上 Wiener 测度, 则 $(\mathcal{W}, \mathcal{B}, \mu)$ 为一概率空间, 我们可以将它代替基本概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其上任一可测函数 (即随机变量) 都称为 **Wiener 泛**

函. 由于 W 中有线性拓扑结构, 故可以讨论其泛函的微分运算, Malliavin 正是从这个观点出发创立他的随机变分学的.

三、随机过程 $X=\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$ 还可以看作乘积空间 $T\times\Omega$ 上的函数, 这是第三种观点. 我们先考察方程 (0.13) 右边的两个积分. 第一个积分的形式是: $\int_0^t H(s,\omega)ds$, 其中 H 为一过程. 它是含参数 ω 的 Lebesgue 积分, 即按轨道的积分. 这种轨道积分没有什么新鲜的东西, 但为了保证积分后得到一个随机过程, 必须要求 $H(s,\omega)$ 关于 (s,ω) 二元可测, 即 H 为一可测过程. 第二个积分的形式是: $\int_0^t H(s,\omega)dW(s,\omega)$, 如果按轨道积分来理解, 就会出现不可克服的困难. 因为 Brown 运动的轨道在任一有限区间的变差都是无界的, 对固定参数 ω, 其 Lebesgue-Stieltjes 积分没有意义. 于是, 必须将随机过程看成 $T\times\Omega$ 上的函数. 伊藤清实质上是利用了被积函数的所谓适应性以及 Brown 运动的鞅性来定义这种随机积分的. 伊藤随机分析给了鞅论的发展以强大的刺激: 1962 年 P.A.Meyer[1,2] 证明了 Doob 提出的上鞅分解定理; 1967 年 Kunita 和 Watanabe[1] 利用这一分解定理把随机积分从 Brown 运动情形推广到了平方可积鞅; 在 20 世纪 70 年代, 法国的 Strasbourg 学派 (参看 Doléans-Meyer[1], Meyer[3], Dellacherie[2] 和 Jacod[1]) 又将其推广到最一般的半鞅情形, 他们充分发展了上述第三种观点, 证明了截口和投影定理, 创立了"随机过程的一般理论", 使随机分析理论提高到了一个全新的水平.

随机分析使得那些在分析和微分几何中通常只对光滑函数和曲线才有意义的重要运算有可能推广到一些极不光滑 (像 Brown 运动轨道那样) 的函数和曲线上去. 利用这种思想, Eells-Elworthy[1], Elworthy[1] 及 Malliavin[1] 等发展了随机微分几何学.

随机分析方法在许多领域中有着广泛的应用: 例如在随机系统控制和滤波理论中, 随机微分方程是不可缺少的工具, 著名的 Kalman-Bucy 滤波公式 (Kalman[1], Kalman-Bucy[1]) 就是一个典型的例子; 工程结构分析中常常要考虑随机荷载: 风力、海浪、地震力等等, 因而其模型归结为随机微分方程; Nelson[1] 应用随机

过程观点来研究微观粒子系统的动态发展，开创了随机力学；最近几年来，随机分析的方法渗入到量子力学中，又形成了量子随机分析．金融经济学是随机分析应用最成功的领域之一． 70 年代 Black-Scholes 从证券价格的随机过程模型出发，导出了期权定价公式，成为金融经济领域的一个重大突破．近 20 年来，随机分析学已成为概率论中最活跃、最富有成果的分支之一．我们这本书的目的，是在假定读者具有一般测度论观点下的概率论和随机过程初步知识的基础上，对随机分析学这一学科作一简明扼要的介绍，以期使读者了解该学科的本质和发展趋势，掌握它的基本理论和方法，为进一步阅读现代文献和开展研究工作打下较牢固的基础．

本书第一章是预备知识，包括随机过程一般理论和鞅论的初步知识；第二章介绍近代随机积分理论，这里我们没有用到 Doob-Meyer 分解定理，而是借助于可料 σ- 代数上构造的 Doléans-Föllmer 测度；在第三章讨论随机微分方程的伊藤公式时，仅限于连续半鞅，这样可使读者不需要太多的准备知识而能较快地掌握随机分析的核心内容；第四章介绍随机微分方程的现代理论及其应用；最后一章则讨论 Malliavin 随机分析，这里我们用的是 Wiener 泛函的 Sobolev 空间方法，作为其应用实例，较详细地介绍了 Hörmander 定理的概率方法证明．

第一章 预 备 知 识

§1. 随机过程的可测性

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为基本概率空间，如果 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 关于概率测度 P 不是完备的，我们总可以使之完备化. 例如，令

$$\overline{\mathcal{F}}=\overline{\mathcal{F}}^P\equiv\{F\subset\Omega;\ \exists F_1,F_2\in\mathcal{F},\text{使}F_1\subset F\subset F_2$$

$$\text{且}P(F_1)=P(F_2)\},$$

则 $\overline{\mathcal{F}}$ 为包含 $\mathcal{F}$ 的 σ- 代数，概率 P 可自然开拓于 $\overline{\mathcal{F}}$ 之上，且 $\overline{\mathcal{F}}$ 关于 P 完备. 因此，我们总假定 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是完备的概率空间.

现在考虑 $\mathcal{F}$ 的一些子 σ- 代数. 设 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为一事件族，我们以 $\sigma(\mathcal{G})$ 表示包含 $\mathcal{G}$ 的最小 σ- 代数，称为由 $\mathcal{G}$ 产生的 σ- 代数；设 $\{X_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 为一族随机变量，我们以 $\sigma\{X_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 表示使该族随机变量为可测的最小 σ- 代数，称为由 $\{X_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 产生的 σ- 代数. 若 T 为一拓扑空间，我们以 $\mathcal{B}(T)$ 表示由 T 中开集全体所产生的 σ- 代数，即 Borel 子集 σ- 代数. 若 $\{\mathcal{F}_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一族子 σ- 代数，则其交 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{F}_\alpha$ 仍为 σ- 代数，但其并 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{F}_\alpha$ 一般不再是 σ- 代数，我们以 $\bigvee_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{F}_\alpha$ 表示由它所产生的 σ- 代数 $\sigma(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{F}_\alpha)$.

随机过程 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 是基本概率空间上的一族随机变量 (除非特别声明，我们考虑的随机过程都是实数值或 $\mathbb{R}^m$ 值的)，它描述随时间而进行的一种随机现象，和它相联系的有一族子 σ- 代数 $\mathfrak{F}^X=\{\mathcal{F}_t^X,t\in\mathbb{R}_+\}$，其中 $\mathcal{F}_t^X\equiv\sigma\{X_s,s\leq t\}$，表示过程进行到 t 时刻以前的事件 σ- 代数，它是一族随时间 t 递增的 σ- 代数，称为 **由过程 X 产生的 σ- 代数流**. 如果我们同时考虑许多过程，甚至还有别的随机因素影响，只限于某一过程产生的 σ- 代数流是

不够的，所以和基本概率空间一起，我们总假定有 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数流 $\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{R}_+\}$，满足以下条件（称为**通常条件**）：

1° 递增性： $s\le t\Longrightarrow\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$；

2° 完备性： $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 中一切 P 零集；

3° 右连续性： $\forall t\in\mathbb{R}_+$，$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}\equiv\bigcap_{u>t}\mathcal{F}_u$.

对于不满足 2° 的 σ- 代数流，我们总可以将一切 P 零集加入，产生一个新的 σ- 代数流，使之满足完备性要求；对于不满足 3° 的 σ- 代数流，也可使之右连续化，即将 $\mathfrak{F}_+=\{\mathcal{F}_{t+},t\in\mathbb{R}_+\}$ 作为新的 σ- 代数流，它显然是右连续的. 所以除非特别声明，**本书中总假定 σ- 代数流 $\mathfrak{F}$ 满足通常条件.** $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 称为漏斗形概率空间，以后均简称为概率空间.

除 $\mathcal{F}_{t+}$ 外，还可定义：

$$\mathcal{F}_{t-}\equiv\bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s=\sigma(\bigcup_{s<t}\mathcal{F}_s),$$

$$\mathcal{F}_\infty\equiv\bigvee_{t<\infty}\mathcal{F}_t=\sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_t).$$

一般说来，$\mathcal{F}_{t-}\ne\mathcal{F}_t$. 若对 $\forall t>0$ 有 $\mathcal{F}_{t-}=\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$，我们就说 σ-代数流 $\mathfrak{F}$ 是连续的.

考虑取值于 $\mathbb{R}^m$ 的随机过程 $X=\{X^1,X^2,\cdots,X^m\}$. 若对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，$X_t:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为 $\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测（亦即对 $i=1,2,\cdots,m,X_t^i$ 为 $\mathcal{F}_t$ 可测），则称 X 为 $\mathfrak{F}$ **适应过程**. 下面我们将按引论中所说的第三种观点，即将 X 看作 $\mathbb{R}_+\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 的映象，在乘积空间 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中给出一些子集 σ- 代数，来定义随机过程的各种可测性质.

最自然的是乘积 σ- 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$. 若 $X:\mathbb{R}_+\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测，则 X 称为**可测过程**. 对于可测过程 X，如果按轨道的积分

$$Y(t,\omega)\equiv\int_0^t X(s,\omega)ds,\qquad t\in\mathbb{R}_+,\ \omega\in\Omega \tag{1.1}$$

存在，由 Fubini 定理， $Y=\{Y_t(\omega),t\in\mathbb{R}_+\}$ 仍为随机过程，但一般不是 $\mathfrak{F}$ 适应过程，为使它仍是 $\mathfrak{F}$ 适应过程，有必要引进如下更强的可测性定义：

定义 1.1 随机过程 $X=X(s,\omega)$，若对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，限制于集合 $[0,t]\times\Omega$ 上为 $\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测 (这里 $\mathcal{B}_t\equiv\mathcal{B}([0,t])$ 为 $[0,t]$ 中 Borel 子集 σ- 代数)，称为 **$\mathfrak{F}$ 循序可测过程**(简称 **$\mathfrak{F}$ 循序过程**). $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的集合 A，若其示性函数 $1_A(t,\omega)$ 为 $\mathfrak{F}$ 循序过程，称为 **$\mathfrak{F}$ 循序集**.

显然 $\mathfrak{F}$ 循序过程是可测、$\mathfrak{F}$ 适应过程，反过来未必成立. 但可以证明 (参看 Dellacherie-Meyer[1])，可测、$\mathfrak{F}$ 适应过程总存在 $\mathfrak{F}$ 循序修正.

命题 1.2 $\mathfrak{F}$ 循序集全体 $\mathcal{M}$ 构成 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 的一个子 σ- 代数. 随机过程 X 当且仅当 $\mathcal{M}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测时为 $\mathfrak{F}$ 循序过程.

证 按定义，

$$\mathcal{M}=\{A\subset\mathbb{R}_+\times\Omega;\ \forall t\in\mathbb{R}_+,\ A\cap([0,t]\times\Omega)\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t\},$$

容易验证， $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 的一个子 σ- 代数. 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意 Borel 集 B，$X^{-1}(B)\in\mathcal{M}$ 的充要条件是：对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，$X^{-1}(B)\cap([0,t]\times\Omega)\in\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t$，即 X 为 $\mathfrak{F}$ 循序过程.

随机过程若一切样本函数为连续 (或右连续且存在有限左极限)，称为连续过程 (或右连左极过程). 类似可定义左连右极过程等.

命题 1.3 右连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程是 $\mathfrak{F}$ 循序过程.

证 设 X 为右连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程. 任意固定 $t\in\mathbb{R}_+$，对 $n\in\mathbb{N}$，在 $[0,t]\times\Omega$ 上定义如下函数：

$$X^{(n)}(s,\omega)=\begin{cases}X(0,\omega), & \text{若} s=0,\\ X(kt2^{-n},\omega), & \text{若}(k-1)t2^{-n}<s\le kt2^{-n}\end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots,2^n),\tag{1.2}$$

则对 $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\{(s,\omega);X^{(n)}(s,\omega)\in B\}=(\{0\}\times\{\omega;X(0,\omega)\in B\})\cup$$

$$\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\left(\frac{(k-1)t}{2^n},\frac{kt}{2^n}\right]\times\left\{\omega;X\left(\frac{kt}{2^n},\omega\right)\in B\right\}\right),$$

上述集合显然属于 $\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t$. 当 $n\longrightarrow\infty$ 时，由 X 的右连续性，在 $[0,t]\times\Omega$ 上有 $X^{(n)}(s,\omega)\longrightarrow X(s,\omega)$, 因而 X 限制于 $[0,t]\times\Omega$ 为 $\mathcal{B}_t\times\mathcal{F}_t$ 可测，即 X 为 $\mathfrak{F}$ 循序过程.

在 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中，我们再定义 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 的两个重要的子 σ- 代数:

定义 1.4 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中由全体连续 (右连左极)$\mathfrak{F}$ 适应过程产生的 σ- 代数 $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ 称为 $\mathfrak{F}$ **可料 (可选)σ- 代数**，其中集合称为 $\mathfrak{F}$ **可料 (可选) 集**，关于 $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ 可测的过程称为 $\mathfrak{F}$ **可料 (可选) 过程**.

因为

$$\text{连续}\mathfrak{F}\text{适应过程}\Longrightarrow\text{右连左极}\mathfrak{F}\text{适应过程}$$

$$\Longrightarrow\mathfrak{F}\text{循序过程}\Longrightarrow\text{可测}\mathfrak{F}\text{适应过程},$$

所以

$$\mathcal{P}\subset\mathcal{O}\subset\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}.$$

以后，当 $\mathfrak{F}$ 固定而不至于引起混淆的情况下，适应、循序、可选、可料等前面的 $\mathfrak{F}$ 均略去.

关于可料过程及可料 σ- 代数的构造，有以下重要结论:

命题 1.5 一切左连续适应过程都是可料过程. 可料 σ- 代数由以下集合系产生:

$$\mathcal{R}\equiv\{[0]\times F_0,F_0\in\mathcal{F}_0;\ (s,t]\times F,\ F\in\mathcal{F}_s,s<t\}$$

($\mathcal{R}$ 中的集合称为 **可料矩形**).

证 设 X 为左连续适应过程. 和命题 1.3 的证明类似 (但注意这次取小区间的左端点值), 对 $n \in \mathbb{N}$, 构造如下过程:

$$X^{(n)}(s,\omega) = \begin{cases} X(0,\omega), & 若 s=0, \\ X(k2^{-n},\omega), & 若 k2^{-n} < s \le (k+1)2^{-n} \end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots), \tag{1.3}$$

则对 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$[X^{(n)}]^{-1}(B) = (\{0\} \times X_0^{-1}(B)) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big(\Big(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \Big] \times X_{k2^{-n}}^{-1}(B) \Big).$$

因 X 为适应过程, $X_0^{-1}(B) \in \mathcal{F}_0$, $X_{k2^{-n}}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$, 故上述集合为 $\mathcal{R}$ 中集合之可列并集, 因而 $X^{(n)}$ 为 $\sigma(\mathcal{R})$ 可测. 由 X 的左连续性, 在 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上有 $\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(s,\omega) = X(s,\omega)$, 因而 X 为 $\sigma(\mathcal{R})$ 可测. 剩下只要证明: $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{P}$.

由刚才证明可知, 一切连续适应过程为 $\sigma(\mathcal{R})$ 可测, 但 $\mathcal{P}$ 是使这些过程为可测的最小 σ- 代数, 故 $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{R})$. 为证 $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}$, 只要证明可料矩形的示性函数是某个连续适应过程序列的极限. 设 $(s,t] \times F \in \mathcal{R}$, 易知存在于 $[0,s]$ 上为 0 的连续函数列 $\{\varphi_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \mathbf{1}_{(s,t]}$, 由于 $F \in \mathcal{F}_s$, 故过程 $Y^{(n)}(u,\omega) \equiv \varphi_n(u)\mathbf{1}_F(\omega)$ 为连续适应过程, 且 $\lim_{n\to\infty} Y^{(n)} = \mathbf{1}_{(s,t]\times F}$, 于是证明了命题结论.

注意, 对于右连续适应过程, 我们一般不能用连续适应过程序列去逼进, 因为按 (1.2) 那样构造的过程 $X^{(n)}$ 未必是适应过程. 作为连续适应过程的典型例子, 我们引进 $\mathfrak{F}$–Brown 运动的概念:

定义 1.6 d 维连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程 $W = (W^1, W^2, \cdots, W^d)$, 若满足以下条件, 则称为 **$\mathfrak{F}$-Brown 运动**(或 **$\mathfrak{F}$-Wiener 过程**):

1° $W(0) = 0$;

2° 若 $0 \le s < t$, 则 $W(t)-W(s)$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，且具有正态 $N(0,(t-s)I)$ 分布，即具有分布密度：

$$[2\pi(t-s)]^{-d/2}\exp\{-|x|^2/2(t-s)\} \qquad (x\in \mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

注意由 $\mathfrak{F}$ 适应性质及 2° 可知 W 为独立增量过程，且各分量 $W^1, W^2, \cdots, W^d$ 相互独立，因而满足前面提到的 Brown 运动的一切性质. 以后如不指明 σ- 代数流 $\mathfrak{F}$, 那么 Brown 运动 W 意味着对于它自身所产生的 σ- 代数流 $\mathfrak{F}^W$ 而言，显然它满足定义 1.6. 剩下的问题是： $\mathfrak{F}^W$ 是否满足通常条件？

定义 1.7 设 $X=\{X_t, t\in \mathbb{R}_+\}$ 为 $\mathfrak{F}$ 适应过程，令 $\mathcal{F}_t^X \equiv \sigma\{X_s, s\le t\}$, $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{F}$ 中 P 零集全体， $\overline{\mathcal{F}}_t^X \equiv \sigma\{\mathcal{F}_t^X \cup \mathcal{N}\}$, 则 $\overline{\mathfrak{F}}^X \equiv \{\overline{\mathcal{F}}_t^X, t\in \mathbb{R}_+\}$ 称为 X 的**自然 σ- 代数流**.

定理 1.8 $\mathfrak{F}$-Brown 运动 W 的自然 σ- 代数流 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 是连续的.

证 为记号简单起见，设 $d=1$. 由 Brown 运动轨道的左连续性，对 $t>0$ 有 $\lim_{s\uparrow\uparrow t} W_s = W_t$, 故有 $\overline{\mathcal{F}}_{t-}^W = \overline{\mathcal{F}}_t^W$. 下面证明右连续性. 为此，只须证对于任一有界 $\overline{\mathcal{F}}_\infty^W$ 可测随机变量 ξ, $\mathbb{E}[\xi|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W]$ 为 $\overline{\mathcal{F}}_t^W$ 可测. 对 $u>t$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{i\lambda W(u)}|\overline{\mathcal{F}}_t^W] &= e^{i\lambda W(t)}\mathbb{E}[e^{i\lambda(W(u)-W(t))}|\overline{\mathcal{F}}_t^W] \\ &= \exp\left\{i\lambda W(t)-\frac{\lambda^2}{2}(u-t)\right\} \qquad \text{a.s..}\end{aligned}$$

设 $0<\varepsilon<u-t$, 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[e^{i\lambda W(u)}|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(e^{i\lambda W(u)}|\overline{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^W)|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W] \\ =&\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda W(t+\varepsilon)-\frac{\lambda^2}{2}(u-t-\varepsilon)\right\}|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W\right] \qquad \text{a.s.,}\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda W(u)}|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W] = \exp\left\{i\lambda W(t)-\frac{\lambda^2}{2}(u-t)\right\} \qquad \text{a.s..}$$

因为函数族 $\{\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(\lambda_k x)+b_k\sin(\nu_k x)];a_k,b_k,\lambda_k,\nu_k\in\mathbb{R},k=0,1,\cdots,n,n\in\mathbb{N}\}$ 对乘积封闭且生成 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 由单调类定理 (附录 A 定理 A. 3 推论 2) 可知, 对任一有界 Borel 函数 f, $\mathbb{E}[f(W_u)|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W]$ 为 $\sigma\{W_t\}$ 可测函数.

现设 $t<u_1<u_2$, f_1 及 f_2 为有界 Borel 函数, 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[f_2(W(u_2))f_1(W(u_1))|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W]\\=&\mathbb{E}[\mathbb{E}(f_2(W(u_2))|\overline{\mathcal{F}}_{u_1+}^W)f_1(W(u_1))|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W]\qquad\text{a.s..}\end{aligned}\tag{1.5}$$

因 $\mathbb{E}[f_2(W(u_1))|\overline{\mathcal{F}}_{u_1+}^W]$ 为 $\sigma\{W(u_1)\}$ 可测, 故存在 Borel 函数 g, 使它等于 $g(W(u_1))$. 由上讨论可知 (1.5) 仍为 $\sigma\{W_t\}$ 可测函数. 依此类推, 对任意有限个时刻 $t<u_1<u_2<\cdots<u_n$ 及有限个有界 Borel 函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$, $\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{n}f_k(W(u_k))|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W\Big]$ 为 $\overline{\mathcal{F}}_t^W$ 可测. 由此推知, 对任一有界 $\overline{\mathcal{F}}_\infty^W$ 可测随机变量 ξ, $\mathbb{E}[\xi|\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W]$ 为 $\overline{\mathcal{F}}_t^W$ 可测. 特别, 当 ξ 为 $\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W$ 可测时也是如此, 故 $\overline{\mathcal{F}}_{t+}^W=\overline{\mathcal{F}}_t^W$.

因此, Brown 运动 W 的自然 σ- 代数流 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 满足通常条件, 且 W 为 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ Brown 运动.

§2. 随机时刻和随机区间

记 $\overline{\mathbb{R}}_+\equiv\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}=[0,\infty]$, 所谓**随机时刻**, 是指取值 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的随机变量. 设 η 与 τ 为两个随机时刻, 则 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的如下子集:

$$[[\eta,\tau]]\equiv\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega;\quad\eta(\omega)\le t\le\tau(\omega)\}$$

称为**随机 (闭) 区间**. 类似地可以定义开的随机区间 $((\eta,\tau))$ 及半开半闭的随机区间 $((\eta,\tau]]$ 或 $[[\eta,\tau))$. 特别

$$[[\tau]]\equiv\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega;\ t=\tau(\omega)\}$$

称为随机时刻 τ 的 **图像**. 注意, 随机区间和图像只是 $\mathbb{R}\times\Omega$ 的子集而不是 $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ 的子集. 即使 τ 可取 ∞ 值, 其图像也不含 (∞,ω) 之类的点.

对于 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的集合 A, 我们总以 $\pi(A)$ 表示其在 Ω 上的投影, 即

$$\pi(A)\equiv\{\omega\in\Omega;\ \exists t\in\mathbb{R}\ 使\ (t,\omega)\in A\}.$$

显然, 对随机时刻 τ 有

$$\pi([[\tau]])=\{\omega\in\Omega;\ \tau(\omega)<\infty\}. \tag{2.1}$$

若 $\pi(A)$ 为 P 零集, 则 A 称为 **不足道集**. 随机过程 X 与 Y, 若集合 $\{(t,\omega);\ X(t,\omega)\neq Y(t,\omega)\}$ 为不足道集, 则称 X 与 Y **无区别**. 容易看出, 无区别的两个过程其几乎所有样本函数重合. 在以后所有讨论中, 我们均把无区别的过程看作同一过程. 因此, 若一个过程几乎所有轨道为连续 (或右连左极), 它必然和某个连续 (右连左极) 过程无区别, 因而也称作连续 (右连左极) 过程.

设 $\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 的一个子 σ- 代数流 (我们这里暂时只假定它是递增的, 而且不涉及概率测度). 有一类特别重要的随机时刻, 它是否已经来临, 依据到目前为止的信息即可判明, 并不依赖于将来的任何事件. 其数学表示如下:

定义 2.1 随机时刻 $\tau:\ \Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$, 若对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有: $\{\omega\in\Omega;\ \tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t$, 称为 **$\mathfrak{F}$-停时**(或 **$\mathfrak{F}$ 可选时**, 当 $\mathfrak{F}$ 固定而不致混淆的情况下, 简称停时或可选时).

显然, 不依赖于 ω 的常时刻 t 是停时的特殊情形.

习题 1.1 证明若 τ 为停时, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有:

$\{\omega\in\Omega;\ \tau(\omega)<t\}\in\mathcal{F}_t$. 当 $\mathfrak{F}$ 右连续时, 反过来也成立.

对于任一随机时刻 τ, 考虑随机区间 $A\equiv[[\tau,\infty))$ 的示性函数 $\mathbf{1}_A(t,\omega)$. 它是一个右连左极过程. 由于

$$(t,\omega)\in A\Longleftrightarrow\tau(\omega)\leq t,$$

故

$$\mathbf{1}_A(t,\omega)=\mathbf{1}_{[\tau\leq t]}(\omega), \tag{2.2}$$

当且仅当 τ 为停时时， 1_A 为适应过程. 根据轨道的右连左极性质，此时 1_A 为可选过程，亦即 $A\in\mathcal{O}$. 这样，我们就证明了

命题 2.2 τ 为停时 $\Longleftrightarrow [[\tau,\infty))\in\mathcal{O}$.

由命题 2.2 很容易推出停时的一些性质, 例如, 由明显的等式:

$$[[\sigma\wedge\tau,\infty))=[[\sigma,\infty))\cup[[\tau,\infty))$$

立即可以推出：若 σ 及 τ 为停时，则 $\sigma\wedge\tau$ 为停时.

习题 1.2 利用命题 2.2 证明：若 σ 及 τ 为停时，则 $\sigma\vee\tau$ 为停时；若 $\{\tau_n\}$ 为停时列，则 $\vee_n\tau_n$ 为停时.

习题 1.3 证明当 $\mathfrak{F}$ 右连续时有 (参看习题 1.1):τ 为停时 $\Longleftrightarrow ((\tau,\infty))\in\mathcal{O}$(因而 $[[\tau]]\in\mathcal{O}$). 因此，一切以停时为端点的随机区间均为可选集. 又若 $\{\tau_n\}$ 为停时列，则 $\wedge_n\tau_n$ 为停时.

注意, 对于随机开区间 $((\tau,\infty))$, 其示性函数是左连右极过程, 故当 τ 为停时时, 它是左连续适应过程. 由命题 1.5, 它又是可料过程，因而 $((\tau,\infty))\in\mathcal{P}$. 换句话说，我们有

命题 2.3 τ 为停时 $\Longrightarrow [[0,\tau]],\ ((\tau,\infty))\in\mathcal{P}$.

注意到习题 1.3 及 $\mathcal{P}\subset\mathcal{O}$, 可知当 $\mathfrak{F}$ 右连续时，上式反过来也成立.

命题 2.4 对一切停时 τ, 存在只取有限多个值的停时列 $\{\tau_n\}$, 满足： $\tau_n(\omega)\downarrow\tau(\omega)$.

证 对 $n\in\mathbb{N}$, 令 $F_n\equiv\{\omega;\tau(\omega)\geq n\}$; 对 $k=1,2,\cdots,n2^n$, 令 $F_{n,k}\equiv\{\omega;(k-1)2^{-n}\leq\tau(\omega)<k2^{-n}\}$; 则 $F_n\in\mathcal{F}_n, F_{n,k}\in\mathcal{F}_{k2^{-n}}$. 定义

$$\tau_n(\omega)=\begin{cases}k2^{-n}, & 若\ \omega\in F_{n,k}(k=1,2,\cdots,n2^n),\\ \infty, & 若\ \omega\in F_n,\end{cases}\tag{2.3}$$

易见 $\{\tau_n\}$ 为停时列，且 $\tau_n\downarrow\tau$.

我们知道， $\mathcal{F}_t$ 是固定时刻 t 前事件的 σ- 代数. 那么对于随机时刻 τ 前事件的 σ- 代数又如何表示呢？为此引进如下定义：

定义 2.5 设 τ 为停时，F 为 Ω 的子集.

$$\tau|_F(\omega) \equiv \begin{cases} \tau(\omega), & 若\ \omega \in F, \\ \infty, & 若\ \omega \overline{\in} F \end{cases} \tag{2.4}$$

称为 τ 在 F 上的限制.

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{F \in \mathcal{F}_\infty; \forall t \in \mathbb{R}_+, F \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_t\} \tag{2.5}$$

称为 τ 前事件 σ- 代数.

容易直接验证：由 2.5 定义的 $\mathcal{F}_\tau$ 确是一个 σ- 代数，且当 $\tau \equiv t$ 为常时刻时，$\mathcal{F}_\tau$ 和 $\mathcal{F}_t$ 重合. 注意到 $F \cap [\tau \le t] = [\tau|_F \le t]$，由 (2.5) 即有：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau &= \{F \in \mathcal{F}_\infty; \quad \tau|_F\ 为停时\ \} \\ &= \{F \in \mathcal{F}_\infty; \quad [[\tau|_F, \infty)) \in \mathcal{O}\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

由此可以得到有关 $\mathcal{F}_\tau$ 及 $\mathcal{F}_\tau$ 可测性的一些简单结果：

命题 2.6 设 σ, τ 为停时，则

1° τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测；
2° $\sigma \le \tau \Longrightarrow \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$；
3° $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$；
4° $\mathcal{F}_\sigma \vee \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$.

证 1° 因为对 $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$[\tau \le s] \cap [\tau \le t] \in \mathcal{F}_{s\wedge t} \subset \mathcal{F}_t.$$

由定义 (2.5) 可知对 $\forall s \in \mathbb{R}_+$，$[\tau \le s] \in \mathcal{F}_\tau$. 此即表明 τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测.

2° 因为对 $F \in \mathcal{F}_\infty$ 有 $\sigma|_F \le \tau|_F$，且

$$[[\tau|_F, \infty)) = [[\sigma|_F, \infty)) \setminus [[\sigma|_F, \tau)).$$

若 $\sigma|_F$ 为停时，则 $[[\tau|_F, \infty))$ 为两个可选集之差，因而其本身也是可选集，故 $\tau|_F$ 为停时. 但由 (2.6) 知，此即意味着：$F \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow F \in \mathcal{F}_\tau$，故 $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

3° 由 2° 显然有 $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\subset\mathcal{F}_\sigma\cap\mathcal{F}_\tau$. 反之, 设 $F\in\mathcal{F}_\sigma\cap\mathcal{F}_\tau$, 则 $\sigma|_F$ 及 $\tau|_F$ 为停时, 因而 $(\sigma\wedge\tau)|_F=\sigma|_F\wedge\tau|_F$ 为停时, 亦即 $F\in\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, 故 $\mathcal{F}_\sigma\cap\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

4° 由 2° 显然有 $\mathcal{F}_\sigma\vee\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$. 由 1° 知 σ 及 τ 均为 $\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$ 可测, 因而 $[\sigma\leq\tau],[\tau<\sigma]\in\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$. 设 $F\in\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$, 则 $F\cap[\sigma\leq\tau]\in\mathcal{F}_{\sigma\vee\tau}$, 从而 $\sigma\vee\tau$ 在 $F\cap[\sigma\leq\tau]$ 上的限制为停时, 但此即 τ 在同一集合上的限制 (因为在此集合上有 $\sigma\leq\tau$, 故 $\sigma\vee\tau=\tau$), 由 (2.6) 知, $F\cap[\sigma\leq\tau]\in\mathcal{F}_\tau$. 同样推理可知 $F\cap[\tau<\sigma]\in\mathcal{F}_\sigma$. 因 F 可表为上述两个不相交集合的并集, 故 $F\in\mathcal{F}_\sigma\vee\mathcal{F}_\tau$.

命题 2.7 设 $\mathfrak{F}$ 右连续, $\{\tau_n\}$ 及 τ 为 $\mathfrak{F}$ 停时. 若 $\tau_n\downarrow\tau$, 则 $\mathcal{F}_{\tau_n}\downarrow\mathcal{F}_\tau$.

证 注意此时有 $\tau_n|_F\downarrow\tau|_F(F\in\mathcal{F}_\infty)$, 和命题 2.6 之 3° 同样推理, 但利用习题 1.3 即可得证.

习题 1.4 证明: 若 σ 为停时, τ 为满足 $\tau\geq\sigma$ 的 $\mathcal{F}_\sigma$ 可测随机时刻, 则 τ 为停时. 并利用此结果证明: 若 σ,τ 为停时, 则 $\sigma+\tau$ 为停时.

此后, 我们总假定 $\mathfrak{F}$ 右连续. 以 $\mathcal{T}$ 表示停时全体所构成的集合, $\mathcal{T}_b$ 为有界停时全体所构成的子集, $\mathcal{T}_f$ 为其中只取有限多个不同实数值的停时全体所构成的子集. 时刻 0 是一个特殊的停时, 其在集合 F 上的限制记为 $0_F(=0|_F)$. 令

$$\mathcal{I}\equiv\{[[0_F]],F\in\mathcal{F}_0;((\sigma,\tau]],\sigma\leq\tau,\sigma,\tau\in\mathcal{T}\}. \tag{2.7}$$

在上述随机区间系的定义中, 若将 $\mathcal{T}$ 分别代以子集 $\mathcal{T}_b$ 或 $\mathcal{T}_f$, 则分别记为 $\mathcal{I}_b$ 或 $\mathcal{I}_f$. 显然, 我们有 $\mathcal{I}_f\subset\mathcal{I}_b\subset\mathcal{I}$. 关于可料 σ- 代数 $\mathcal{P}$ 的构造, 还可以得到如下结论:

命题 2.8 $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{I})=\sigma(\mathcal{I}_b)=\sigma(\mathcal{I}_f)$.

证 命题 1.5 已经证明 $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{R}),\mathcal{R}$ 为可料矩形全体. 由于 $[0]\times F=[[0_F]],(s,t]\times F=((s|_F\wedge t,t]]$, 故 $\mathcal{R}\subset\mathcal{I}_f$; 又由于 $((\sigma,\tau]]=[[0,\tau]]\setminus[[0,\sigma]]\in\mathcal{P}$, 故 $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}$. 因为 $\mathcal{R}\subset\mathcal{I}_f\subset\mathcal{I}_b\subset\mathcal{I}\subset\mathcal{P}$, 所以我们有 $\sigma(\mathcal{R})=\sigma(\mathcal{I}_f)=\sigma(\mathcal{I}_b)=\sigma(\mathcal{I})=\mathcal{P}$.

随机时刻的一个重要例子是所谓首达时. 设 X 为一过程, B 为状态空间 $\mathbb{R}^m$ 的某个集合, 过程 X 首达 B 的时刻定义为

$$\tau_B(\omega) \equiv \inf\{t; X(t,\omega) \in B\}, \tag{2.8}$$

(我们总约定 $\inf(\phi) = \infty$). 那么, 首达时是否随机变量? 是否停时? 为解答这个问题, 我们注意:

$$\tau_B(\omega) = \inf\{t; (t,\omega) \in X^{-1}(B)\},$$

其中 $X^{-1}(B)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集. 当 X 为可测 (循序、可选、可料) 过程而 B 为 Borel 子集时, 按定义 $X^{-1}(B)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ 可测 (循序、可选、可料) 集. 因此, 为研究 τ_B 的可测性, 一般地引进 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中集合 A 的初遇(début) 的概念, 其定义为

$$D_A(\omega) \equiv \inf\{t; (t,\omega) \in A\}. \tag{2.9}$$

注意对 $t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\{\omega; D_A(\omega) < t\} = \pi[A \cap [[0,t))], \tag{2.10}$$

其中 $[[0,t))$, 表示 $[0,t) \times \Omega$. 所以, 为证 τ_B 或 D_A 的可测性, 涉及可测集的投影是否可测的问题. 要彻底解决这一问题, 必须用到 Choquet 的容度理论.

§3. Choquet 容度理论及应用

众所周知, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上任何测度 μ 是内正则的, 即对 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K);\ K \subset B,\ K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)\},$$

其中 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中紧子集全体. Choquet[1,2] 在研究位势理论时注意到, 这种内正则性质和测度的可加性并没有本质的联系,

它只取决于关于集合单调序列的连续性质，于是创立了容度理论. 1957 年， Hunt 在他的著名论文 (Hunt[1]) 中成功地将容度理论用于马氏过程的研究，证明了过程轨道首达 Borel 集合的时刻的可测性. 20 世纪 60 年代， Meyer 和 Dellacherie 进一步运用这个理论证明了随机集合初遇的可测性和著名的截口定理，因而奠定了随机过程一般理论的基础 (参看 Dellacherie [1])，本节将扼要介绍这一理论及其在概率论中的若干应用.

先介绍解析集的概念. $\mathbb{R}^d$ 中的解析集，按定义是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中一列开集的交集 (G_δ 集) 在 $\mathbb{R}^d$ 中的投影. 这种集类严格地比 Borel 子集 σ- 代数要大. 这里，我们要给出解析集的一般定义.

设 Ω 为一集合， $\mathcal{F}$ 为 Ω 的子集系. 若 $\emptyset \in \mathcal{F}$，则 $\mathcal{F}$ 称为 Ω 上的一个 **铺**(paving). 此时 $(\Omega,\mathcal{F})$ 称为 **铺集**(paved set). 对任一拓扑空间 E，我们以 $\mathcal{K}(E)$ 表示 E 中紧子集全体所构成的铺，在乘积空间 $E\times\Omega$ 中，以 $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}\equiv\{K\times F;K\in\mathcal{K}(E),F\in\mathcal{F}\}$ 表示 $\mathcal{K}(E)$ 和 $\mathcal{F}$ 的乘积铺，并以 π 表示由 $E\times\Omega$ 到 Ω 的投影.

定义 3.1 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一铺集， A 为 Ω 的子集. 若存在一个辅助的紧距离空间 E 和 $E\times\Omega$ 的一个子集 $S\in(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$，使 $\pi(S)=A$，则 A 称为 $\mathcal{F}$ **解析集**. $\mathcal{F}$ 解析集全体所构成的铺记为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

这里 $S\in(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 是指 S 可由 $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}$ 中的集合先经可列并运算、再经可列交运算而得到.

考虑铺集 $(E\times\Omega,\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})$ 及 $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}$ 解析集在 Ω 上的投影，由定义立即可以得到

命题 3.2 设 E 为紧距离空间， $(\Omega,\mathcal{F})$ 为铺集. 则 $\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F}$ 解析集在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$ 解析集.

证 设 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})$. 按解析集定义，存在另一个辅助的紧距离空间 E' 及 $S\in(\mathcal{K}(E')\otimes\mathcal{K}(E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$，使 $\pi'(S)=A$(这里 π' 表示由 $E'\times E\times\Omega$ 到 $E\times\Omega$ 的投影). 因为 $E'\times E$ 仍为紧距离空间，且 $\mathcal{K}(E')\otimes\mathcal{K}(E)\subset\mathcal{K}(E'\times E)$，所以 $S\in(\mathcal{K}(E'\times E)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$，且 $\pi\circ\pi'(S)=\pi(A)$. 按解析集定义， $\pi(A)\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

为研究 $\sigma(\mathcal{F})$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 的关系，先给出 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对某些运算的封闭性质.

命题 3.3 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一铺集，则

1° $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并及可列交运算封闭;

2° $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))=\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

若 $(\Omega',\mathcal{F}')$ 为另一铺集，则

3° $\mathcal{A}(\mathcal{F})\otimes\mathcal{A}(\mathcal{F}')\subset\mathcal{A}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')$.

证 1° 设 $\{A_n\}\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 依定义，对每一 n 存在紧距离空间 E_n 及 $S_n\in(\mathcal{K}(E_n)\otimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 使 $\pi(S_n)=A_n$. 为证其可列交 $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 令 $E=\prod_n E_n$ 为乘积拓扑空间 (仍是紧距离空间), 则乘积铺 $\bigotimes_n\mathcal{K}(E_n)\subset\mathcal{K}(E)$. 以 C_n 表示 $E\times\Omega$ 中以 S_n 为底的柱集: $C_n=S_n\times(\prod_{m\neq n}E_m)$. 显然有 $\bigcap_n A_n=\pi(\bigcap_n C_n)$. 但 $C_n\in(\bigotimes_n\mathcal{K}(E_n)\bigotimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 故 $\bigcap_n C_n\in(\bigotimes_n\mathcal{K}(E_n)\bigotimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}\subset(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 按 $\mathcal{F}$ 解析集定义可知 $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 即 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列交运算封闭.

为证其可列并 $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 令 E 为拓扑和空间 $\sum_n E_n$ 的单点紧化拓扑空间，并定义 $\sum_n\mathcal{K}(E_n)\equiv\{\sum_n K_n; K_n\in\mathcal{K}(E_n),\forall n\in\mathbb{N}$, 且除有限个 K_n 外均为空集$\}$, 则 $\sum_n\mathcal{K}(E_n)\subset\mathcal{K}(E)$, 且 $\bigcup_n A_n=\pi(\sum_n S_n)$. 设 $S_n=\bigcap_m S_{n,m}$, 其中 $\{S_{n,m}\}\subset(\mathcal{K}(E_n)\bigotimes\mathcal{F})_\sigma$. 由于 $\sum_n S_n=\sum_n\bigcap_m S_{n,m}=\bigcap_m\sum_n S_{n,m}$, 及 $\sum_n S_{n,m}\in(\sum_n\mathcal{K}(E_n)\bigotimes\mathcal{F})_\sigma$ 可知 $\sum_n S_n\in(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 于是, 按 $\mathcal{F}$ 解析集的定义可知 $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$, 即 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并运算也封闭.

3° 设 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F}),A'\in\mathcal{A}(\mathcal{F}')$. 由解析集定义必存在 $A_1\in\mathcal{F}_\sigma$ 及 $A_1'\in\mathcal{F}_\sigma'$, 使 $A\subset A_1$ 及 $A'\subset A_1'$, 且有 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\bigotimes\mathcal{F}'\subset\mathcal{A}(\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{F}')$. 由于 $\mathcal{A}(\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{F}')$ 对可列并运算封闭，故 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\bigotimes\mathcal{F}_\sigma'\subset\mathcal{A}(\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{F}')$. 同理，有 $\mathcal{F}_\sigma\bigotimes\mathcal{A}(\mathcal{F}')\subset\mathcal{A}(\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{F}')$. 于是，$A\times A'=(A\times A_1')\cap(A_1\times A')\in\mathcal{A}(\mathcal{F}\bigotimes\mathcal{F}')$.

2° 显然 $\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. 现设 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$, 按 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 解析集的定义，存在紧距离空间 E 及 $S\in(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{A}(\mathcal{F}))_{\sigma\delta}$ 使 $\pi(S)=A$. 但由 3° 可知，$\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}(\mathcal{K}(E))\bigotimes\mathcal{A}(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})$.

由于 $\mathcal{A}(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})$ 对可列并及可列交封闭，故 $S\in\mathcal{A}(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})$，由命题 3.2 $\pi(S)=A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 这就证明了 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

由于解析集的余集未必为解析集，故 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 一般不构成 σ- 代数. 但我们有

命题 3.4 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为铺集. 为使 $\sigma(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$，其必要充分条件是： $\mathcal{F}$ 中一切集合的余集都是 $\mathcal{F}$ 解析集.

证 必要性显然成立. 为证充分性，令

$$\mathcal{G}\equiv\{A\subset\Omega; A\text{及}A^c\in\mathcal{A}(\mathcal{F})\},$$

则我们有 $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 因为 $\mathcal{G}$ 之定义关于 A 及 A^c 是对称的，且 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对可列并及可列交封闭，所以 $\mathcal{G}$ 是 σ- 代数. 于是，$\sigma(\mathcal{F})\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

现在考虑概率论中通常遇到的情况，即 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$，$\mathcal{K}=\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$ (由以下证明可以看出， $\mathbb{R}_+$ 可换成更一般的具有可数基的局部紧 Hausdorff 空间)，$(\Omega,\mathcal{F})$ 为一可测空间. 我们有

定理 3.5 1° $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}(\mathcal{K})=\mathcal{A}(\mathcal{B})$;

2° $\mathcal{B}\times\mathcal{F}\subset\mathcal{A}(\mathcal{K}\bigotimes\mathcal{F})=\mathcal{A}(\mathcal{B}\times\mathcal{F})$;

3° $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ 解析集在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$ 解析集.

(注意此处 $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ 是指乘积 σ- 代数，和乘积铺 $\mathcal{B}\bigotimes\mathcal{F}$ 不是一回事).

证 1° 因为紧子集的余集可表为紧子集的可并列，而 $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}(\mathcal{K})$，$\mathcal{A}(\mathcal{K})$ 封闭于可列并，故由命题 3.4 得 $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{K})\subset\mathcal{A}(\mathcal{K})$. 由命题 3.3 之 2°，$\mathcal{A}(\mathcal{B})\subset\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{K}))=\mathcal{A}(\mathcal{K})$，但显然有 $\mathcal{A}(\mathcal{K})\subset\mathcal{A}(\mathcal{B})$，故 $\mathcal{A}(\mathcal{K})=\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

2° 因为 $\mathcal{K}\bigotimes\mathcal{F}$ 中集合的余集可表为 $\mathcal{K}\bigotimes\mathcal{F}$ 中集合的可列并，且 $\mathcal{B}\times\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{K}\bigotimes\mathcal{F})$，故由 1° 同样推理得证 2°.

3° 单点紧化后， $\overline{\mathbb{R}}_+$ 为紧距离空间；由 2° 可知 $\mathcal{A}(\mathcal{K}\bigotimes\mathcal{F})=\mathcal{A}(\mathcal{B}\times\mathcal{F})$，于是由命题 3.1 直接推出.

再引进 Choquet 的容度概念.

定义 3.6 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为一铺集且 $\mathcal{F}$ 对有限交及并运算封闭. 所谓 Ω上的 $\mathcal{F}$ **容度** 是指具有以下性质的集函数 $I:\mathfrak{P}(\Omega)\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$:

1° 单调性: $E \subset F \Longrightarrow I(E) \leq I(F)$;

2° 从下连续性: $E_n \uparrow E \Longrightarrow I(E) = \sup_n I(E_n)$;

3° 沿 $\mathcal{F}$ 从上连续性:

$$\{F_n\} \subset \mathcal{F}, F_n \downarrow F \Longrightarrow I(F) = \inf_n I(F_n).$$

若 $E \subset \Omega$ 满足

$$I(E) = \sup\{I(F); F \subset E, F \in \mathcal{F}_\delta\}, \tag{3.1}$$

则 E 称为 I 可容集.

先看容度的两个例子:

例 1.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, 对 $E \subset \Omega$ 令

$$P^*(E) = \inf\{P(F); F \supset E, F \in \mathcal{F}\}, \tag{3.2}$$

则 P^* 为 Ω 上的 $\mathcal{F}$ 容度 (这是外测度的基本性质, 例如参看 Halmos[1], §12).

例 1.2 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}_+), \mathcal{H} = (\mathcal{K} \bigotimes \mathcal{F})_s$ 为 $\mathcal{K} \bigotimes \mathcal{F}$ 中集合的有限并全体构成的集系, 对 $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 令

$$I(A) = P^*[\pi(A)], \tag{3.3}$$

则 I 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的 $\mathcal{H}$ 容度.

证 容度性质 1° 及 2° 显然满足. 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{H}$ 且 $A_n \downarrow A$, 则 $\{\pi(A)_n)\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中单调非升序列. 考虑到例 1.1, 为证性质 3° 只须证明 $\bigcap_n \pi(A_n) = \pi(A)$. 显然我们有 $\pi(A) = \pi(\bigcap_n A_n) \subset \bigcap_n \pi(A_n)$. 为证相反包含关系, 设 $\omega \in \bigcap_n \pi(A_n)$, 由于其 ω- 截口 $\{(A_n)_\omega\}$ 为单调非升非空紧集序列, 故其交 $A_\omega \neq \emptyset$, 即 $\omega \in \pi(A)$. 于是, $\bigcap_n \pi(A_n) = \pi(A)$.

Choquet 证明了下面的著名定理:

定理 3.7 (Choquet 容度定理) 若 I 为 $\mathcal{F}$ 容度, 则一切 $\mathcal{F}$ 解析集为 I 可容集.

证 证明分两步进行:

1° 一切 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 集是 I 可容集.

设 $E\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$. 不妨设 $I(E)>-\infty, E=\bigcap_n E_n$, 其中 $\{E_n\}\subset\mathcal{F}_\sigma$; 且对 $\forall n\in\mathbb{N}, E_n=\bigcup_m E_{n,m}$, 其中 $\{E_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的集合序列, 不妨设它单调非降. 为证 E 是 I 可容集 (即满足 (3.1)), 只须证: $\forall a<I(E),\exists F\in\mathcal{F}_\delta$ 使 $F\subset E$ 且 $I(F)\geq a$.

由容度性质 2°, $I(E)=I(E\cap E_1)=\sup_m I(E\cap E_{1,m})$, 故存在 m_1 使 $I(E\cap E_{1,m_1})>a$, 记 $C_1\equiv E\cap E_{1,m_1}$; 再由性质 2°, $I(C_1)=I(C_1\cap E_2)=\sup_m I(C_1\cap E_{2,m})$, 又存在 m_2 使 $I(C_1\cap E_{2,m_2})>a$, 再记 $C_2=C_1\cap E_{2,m_2};\cdots\cdots$ 如此下去, 可得序列 $\{C_n\}$ 及 $\{E_{n,m_n}\}\subset\mathcal{F}$, 使对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $I(C_n)>a, C_n=C_{n-1}\cap E_{n,m_n}\subset E_n$. 令

$$F_n\equiv E_{1,m_1}\cap E_{2,m_2}\cap\cdots\cap E_{n,m_n}\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

$$F\equiv\bigcap_n F_n=\bigcap_n E_{n,m_n},$$

则对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $C_n\subset F_n, I(F_n)>a$, 且 $\{F_n\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中单调非升序列. 由容度性质 3°,

$$I(F)=\inf_n I(F_n)\geq a.$$

显然, $F\in\mathcal{F}_\delta$ 且 $F=\bigcap_n E_{n,m_n}\subset\bigcap_n E_n=E$. 由此可见 E 为 I 可容集.

2° 一切 $\mathcal{F}$ 解析集是 I 可容集.

设 $A\in\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 按定义, 存在紧距离空间 E 及 $S\in(\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 使 $\pi(S)=A$. 以 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{K}(E)\bigotimes\mathcal{F}$ 中集合的一切有限并集所构成的铺, 由 $\mathcal{K}(E)$ 及 $\mathcal{F}$ 对有限并及交运算的封闭性质可知 $\mathcal{H}$ 也是如此. 对 $E\times\Omega$ 的任一子集 H, 令

$$J(H)\equiv I[\pi(H)],$$

由例 1.2 所证, 可知 J 为 $E\times\Omega$ 上的 $\mathcal{H}$ 容度. 但 1° 已证 S 为 J 可容集, 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathcal{H}_\delta$ 集 $S'\subset S$ 使 $J(S')\geq J(S)-\varepsilon$. 然而 $\mathcal{H}_\delta$ 集 S' 之投影 $\pi(S')\in\mathcal{F}_\delta$, 且 $\pi(S')\subset\pi(S)=A$. 因

$$I[\pi(S')]\geq I[\pi(S)]-\varepsilon=I(A)-\varepsilon,$$

故 A 为 I 可容集.

回到例 1.1. 由于 P^* 为 $\mathcal{F}$ 容度, 按定理, 一切 $\mathcal{F}$ 解析集为 P^* 可容集. 但此时 $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$, 在其上 $P^* = P$, 故由 (3.1), 对 $\forall E \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ 有

$$P^*(E) = \sup\{P(F); F \subset E, F \in \mathcal{F}\},$$

因此存在 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 使 $F_1 \subset E \subset F_2$ 且 $P(F_1) = P(F_2)$, 即 $E \in \overline{\mathcal{F}}^P$($\mathcal{F}$ 关于 P 的完备化 σ- 代数). 注意到 $\mathcal{F}$ 解析集的定义并不依赖于概率测度 P, 因此这个结论对任一概率测度都是对的, 也就是

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \bigcap_P \overline{\mathcal{F}}^P, \tag{3.4}$$

其中 P 跑遍 $\mathcal{F}$ 上一切概率测度的集合. $\bigcap_P \overline{\mathcal{F}}^P$ 中的集合称为**普遍可测集**. 这样, 我们便得到定理的重要推论:

推论 可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中一切 $\mathcal{F}$ 解析集是普遍可测集. 特别, 若 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 **完备** 概率空间, 则 $\mathcal{F}$ 解析集是可测集.

再由定理 3.5 之 2° 及 3°, 便得以下定理:

定理 3.8 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 **完备** 概率空间, 则一切 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ 可测子集在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$ 可测集.

现在假定 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为 **完备** 概率空间, $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为 **满足通常条件** 的子 σ- 代数流. 由定理 3.8 可知, 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t$ 可测集在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}_t$ 可测集. 于是, 我们有以下重要的推论:

推论 1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ 可测集的初遇为 $\mathcal{F}$ 可测函数, $\mathfrak{F}$ 循序集的初遇为 $\mathfrak{F}$ 停时.

证 设 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$. 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 由 (2.10) 式有

$$\{\omega; D_A(\omega) < t\} = \pi[A \cap [[0, t))] \in \mathcal{F},$$

故 D_A 为 $\mathcal{F}$ 可测函数; 再设 $A \in \mathcal{M}$. 此时对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $A \bigcap [[0, t)) \in \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t$, 因此 $\pi[A \bigcap [[0, t))] \in \mathcal{F}_t$, 故 D_A 为 $\mathfrak{F}$ 停时 (参看习题 1.1).

推论 2 可测过程首达 Borel 集之时刻为 $\mathcal{F}$ 可测函数；$\mathfrak{F}$ 循序过程首达 Borel 集之时刻为 $\mathfrak{F}$ 停时.

证 设 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 按定义 (2.8) 和 (2.9) 式

$$\begin{aligned}\tau_B(\omega) &= \inf\{t; X(t,\omega) \in B\} \\ &= \inf\{t; (t,\omega) \in X^{-1}(B)\} \\ &= D_{X^{-1}(B)}(\omega),\end{aligned}$$

当 X 为可测 (循序) 过程时, $X^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ ($X^{-1}(B) \in \mathcal{M}$), 由推论 1 即得证.

最后我们来研究随机时刻 τ 前事件 σ- 代数 $\mathcal{F}_\tau$, 为使对其构造有个清晰的印象, 我们用下式定义一个映象 $\varphi_\tau : \{\omega; \tau(\omega) < \infty\} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$\varphi_\tau(\omega) \equiv (\tau(\omega), \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega. \tag{3.5}$$

其逆映象 φ_τ^{-1} 将 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 的子集映射为 $\{\omega; \tau(\omega) < \infty\}$ 中的子集:

$$\begin{aligned}\varphi_\tau^{-1}(A) &= \{\omega; (\tau(\omega), \omega) \in A, \tau(\omega) < \infty\} \\ &= \pi(A \cap [[\tau]]).\end{aligned} \tag{3.6}$$

我们将 $\varphi_\tau^{-1}(A)$ 称为 A 之 τ 截口, 简记为 A_τ. 对于随机过程 X, 也可定义其 τ 截口如下:

$$X_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\infty]} \equiv \begin{cases} X(\tau(\omega), \omega), & 若\ \tau(\omega) < \infty, \\ 0, & 若\ \tau(\omega) = \infty, \end{cases} \tag{3.7}$$

这里 $X_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\infty]}$ 应看成一个整个的记号.

推论 3 1° $\tau \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A_\tau \in \mathcal{F}_\tau$;

2° $\tau \in \mathcal{T}$, X 为循序过程 $\Longrightarrow X_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测函数.

证 1° 设 $A \in \mathcal{M}$, 由于 $[[\tau]] \in \mathcal{O} \subset \mathcal{M}$(习题 1.3), 故 $A \bigcap [[\tau]] \in \mathcal{M}$. 根据推论 1, $A \bigcap [[\tau]]$ 之初遇为停时. 但此初遇即 τ 在 A_τ 上的限制, 根据 (2.6) 式即有 $A_\tau \in \mathcal{F}_\tau$(容易看出, 循序集之投影 $A_\tau \in \mathcal{F}_\infty$).

2° 在集合 $\{\omega; \tau(\omega) < \infty\}$ 上有

$$X_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\infty]} = X \circ \varphi_\tau,$$

由 1° 所证，对 $A \in \mathcal{M}, \varphi_\tau^{-1}(A) = A_\tau \in \mathcal{F}_\tau$, 故

$$\varphi_\tau : [\tau < \infty] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \Omega \text{ 为 } \mathcal{F}_\tau/\mathcal{M} \text{ 可测;}$$

若 X 为循序过程，则

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ 为 } \mathcal{M}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \text{ 可测.}$$

故其复合映象 $X \circ \varphi_\tau$ 为 $\mathcal{F}_\tau/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测. 显然，$[\tau < \infty], [\tau = \infty] \in \mathcal{F}_\tau$, 于是 $X_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\infty]}$ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测函数.

注 从证明中看出：若随机时刻 τ 之图像为可选集 (甚至只要假定是循序集), 则 τ 为停时. 因此我们有

$$\tau \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow [[\tau]] \in \mathcal{O} \text{ (或 } \mathcal{M}). \tag{3.8}$$

又 $\mathcal{F}_\tau$ 中集合总可以分解为互不相交的两个集合的并集：其一为某循序集之 τ 截口，其一为某 $\mathcal{F}_\infty$ 可测集与 $[\tau = \infty]$ 之交集，即

$$\mathcal{F}_\tau = \varphi_\tau^{-1}(\mathcal{M}) + (\mathcal{F}_\infty \cap [\tau = \infty]). \tag{3.9}$$

读者可自行证明之. (3.9) 式表明，$\mathcal{F}_\tau$ 是一个 σ- 代数.

§4. 一致可积性和 L^p 收敛性

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备概率空间，$p \in [1, \infty)$. 我们以 $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 表示 p 次幂可积的实值随机变量 (等价类) 所构成的 Banach 空间，其范数由下式规定：

$$\|\xi\|_p = \|\xi\|_{L^p} \equiv (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p}.$$

$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为本性有界随机变量 (等价类) 所构成的 Banach 空间，其范数为

$$\begin{aligned} \|\xi\|_\infty = \|\xi\|_{L^\infty} &= \operatorname{ess\,sup} |\xi| \\ &\equiv \inf\{c; P[|\xi| > c] = 0\}. \end{aligned}$$

随机变量族 $\{X_\alpha, \alpha \in \Gamma\} \subset L^p$, 若满足

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \|X_\alpha\|_p < \infty,$$

称为在 L^p 中有界. 我们知道, 当 $p \in (1, \infty)$ 时, L^p 为自反 Banach 空间, 因而每一 L^p 有界集在弱收敛 (即在弱拓扑 $\sigma(L^p, L^q)$ 中收敛, 其中 $q^{-1} + p^{-1} = 1, q$ 称为 p 的共轭指数) 意义下是相对列紧集. 但当 $p = 1$ 时, L^1 不是自反的, 因而 L^1 中有界集未必在弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 中为相对列紧集, 为使其相对列紧, 必须加上所谓**积分一致绝对连续性**条件, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使对 $\forall F \in \mathcal{F}$ 有

$$P(F) \leq \delta \Longrightarrow \sup_{\alpha \in \Gamma} \int_F |X_\alpha| dP \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

为此, 我们给出如下定义:

定义 4.1 随机变量族 $\{X_\alpha, a \in \Gamma\} \subset L^1$, 若

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{\alpha \in \Gamma} \int_{[|x_\alpha| \geq c]} |X_\alpha| dP = 0, \tag{4.2}$$

称为**一致可积族**.

显然, 有限个可积随机变量必然一致可积; 若 $\{X_\alpha\}$ 为某个可积随机变量 ξ 所控制: $\sup_\alpha |X_\alpha| \leq \xi$ a.s.(或者为某个一致可积族 $\{Y_\beta, \beta \in \Gamma'\}$ 所控制: 对 $\forall \in \Gamma, \exists \beta \in \Gamma'$ 使 $|X_\alpha| \leq Y_\beta$ a.s.), 则 $\{X_\alpha\}$ 一致可积. 关于一致可积性, 有以下判别准则:

命题 4.2 设 $\{X_\alpha, a \in \Gamma\} \subset L^1$, 则 $\{X_\alpha\}$ 为一致可积族的充分必要条件是: 它在 L^1 中有界且积分一致绝对连续.

证 必要性. 对 $F \in \mathcal{F}, c > 0$ 我们有

$$\int_F |X_\alpha| dP \leq cP(F) + \int_{[|x_\alpha| \geq c]} |X_\alpha| dP, \ \alpha \in \Gamma. \tag{4.3}$$

若 $\{X_\alpha\}$ 一致可积, 可取 c 足够大使

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \int_{[|x_\alpha| \geq c]} |X_\alpha| dP < \varepsilon/2,$$

在 (4.3) 中令 $F=\Omega$, 便得 L^1 有界性; 令 $\delta=\varepsilon/2c$, 便得一致绝对连续性.

充分性. 任给 $\varepsilon>0$, 由一致绝对连续性, 存在 $\delta>0$ 使 (4.1) 成立. 取 $c\geq\delta^{-1}\sup_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{E}[|X_\alpha|]$, 则

$$\sup_{\alpha\in\Gamma}P[|X_\alpha|\geq c]\leq c^{-1}\sup_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{E}[|X_\alpha|]\leq\delta,$$

由 (4.1) 即得

$$\sup_{\alpha\in\Gamma}\int_{[|X_\alpha|\geq c]}|X_\alpha|dP\leq\varepsilon,$$

即 $\{X_\alpha\}$ 一致可积.

注 若 P 无原子, 则由 (4.1) 可推出 L^1 有界性. 因为此时可将 Ω 表为有限个其测度不超过 δ 的可测集之并.

下面的充分条件实际上也是必要条件, 但我们只用到其充分性:

命题 4.3 若存在 $\mathbb{R}_+$ 上非负可测函数 $g(t)$, 使

1° $\lim_{t\to\infty}g(t)/t=\infty$;

2° $\sup_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{E}[g(|X_\alpha|)]<\infty$.

则 $\{X_\alpha,a\in\Gamma\}$ 为一致可积族.

证 令 $a=\sup_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{E}[g(|X_\alpha|)]<\infty$. 任给 $\varepsilon>0$, 由 1° 可选 c 充分大, 使当 $t\geq c$ 时有 $g(t)/t\geq a/\varepsilon$. 于是在集合 $\{\omega:|X_\alpha(\omega)|\geq c\}$ 上有

$$g(|X_\alpha(\omega)|)/|X_\alpha(\omega)|\geq a/\varepsilon,$$

亦即对 $\forall\alpha\in\Gamma$ 有 $|X_\alpha|\leq\varepsilon g(|X_\alpha|)/a$, 于是

$$\int_{[|X_\alpha|\geq c]}|X_\alpha|dP\leq\varepsilon\mathbb{E}[g(|X_\alpha|)]/a\leq\varepsilon,\qquad\forall\alpha\in\Gamma.$$

因而 $\{X_\alpha\}$ 为一致可积族.

特别, 取 $g(t)=t^p,p>1$ 得

推论 1 对 $p>1$, 在 L^p 中有界的随机变量族为一致可积族.

若取 $g(t)=t(\log t)^+$, 则有

推论 2 若 $\sup_\alpha \mathbb{E}[|X_\alpha|(\log|X_\alpha|)^+] < \infty$, 则 $\{X_\alpha\}$ 为一致可积族.

作为一致可积族的重要例子，有

命题 4.4 设 $\xi \in L^1, \{\mathcal{F}_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的任一族子 σ- 代数，令 $X_\alpha \equiv \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\alpha]$, 则 $\{X_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ 为一致可积族.

证 由于 $|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\alpha]| \le \mathbb{E}[|\xi||\mathcal{F}_\alpha]$ a.s., 只须证 $\{\mathbb{E}[|\xi||\mathcal{F}_\alpha], a \in \Gamma\}$ 为一致可积族，因而不妨设 ξ 非负．对 $c > 0$ 有

$$P[X_\alpha \ge c] \le c^{-1}\mathbb{E}[X_\alpha] = c^{-1}\mathbb{E}[\xi], \qquad \forall \alpha \in \Gamma.$$

对 $a > 0$ 及 $\forall \alpha \in \Gamma$, 由条件期望性质有

$$\begin{aligned}\int_{[X_\alpha \ge c]} X_\alpha dP &= \int_{[X_\alpha \ge c]} \xi dP \\ &\le aP[X_\alpha \ge c] + \int_{[\xi \ge a]} \xi dP \\ &\le \frac{a}{c}\mathbb{E}[\xi] + \int_{[\xi \ge a]} \xi dP \qquad \forall \alpha \in \Gamma.\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 选 a 足够大使右边第二项不超过 $\varepsilon/2$, 再选 c 足够大使第一项不超过 $\varepsilon/2$, 于是证明了 $\{X_\alpha\}$ 的一致可积性.

由一致可积性可得到 L^1 收敛性判别准则：

定理 4.5 设 $\{X_n\}$ 为可积随机变量序列，ξ 为一随机变量．则 $\{X_n\} L^1$ 收敛于 ξ(且 $\xi \in L^1$) 的充分必要条件是： $\{X_n\}$ 依概率收敛于 ξ 且 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ 一致可积.

证 必要性．由 L^1 收敛显然推出依概率收敛且在 L^1 中有界，根据命题 4.2, 只须证 (4.1) 成立．对 $F \in \mathcal{F}$, 显然有

$$\int_F |X_n| dP \le \int_F |\xi| dP + \mathbb{E}[|X_n - \xi|], \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 由 L^1 收敛性，$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ 使当 $n > n_0$ 时有 $\mathbb{E}[|X_n - \xi|] \le \varepsilon/2$. 由于 $\{\xi, X_1, X_2, \cdots, X_{n_0}\}$ 为有限族，故 $\exists \delta > 0$, 使当 $P(F) \le \delta$

时有

$$\int_F |\xi| dP \le \varepsilon/2, \qquad \sup_{n\le n_0}\int_F |X_n| dP \le \varepsilon,$$

由 (4.4) 得 $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_F |X_n|dP \le \varepsilon$.

充分性. 设 $X_n \xrightarrow{P} \xi$ 且 $\{X_n\}$ 一致可积. 由 L^1 有界性及 Fatou 引理知 $\xi \in L^1$ 且 $\{X_n - \xi, n \in \mathbb{N}\}$ 一致可积. 于是对 $\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使对 $F \in \mathcal{F}$ 有

$$P(F) \le \delta \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_F |X_n - \xi| dP \le \varepsilon/2.$$

再由 $X_n \xrightarrow{P} \xi$ 知, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, 使当 $n \ge n_0$ 时有

$$P[|X_n - \xi| \ge \varepsilon/2] < \delta,$$

因而当 $n \ge n_0$ 时有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n - \xi|] = &\int_{[X_n-\xi|\ge\varepsilon/2]} |X_n - \xi| dP \\ &+ \int_{[X_n-\xi|<\varepsilon/2]} |X_n - \xi| dP \\ \le&\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $X_n \xrightarrow{L^1} \xi$.

对于非负可积随机变量序列, 则有以下简单的结果:

定理 4.6 设 $\{X_n\}$ 及 ξ 为非负可积随机变量, 则

$$X_n \xrightarrow{L^1} \xi \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow{P} \xi \text{ 且 } \mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi].$$

证 必要性 ($\Longrightarrow$) 显然成立, 今证充分性. 因

$$X_n + \xi = (X_n \vee \xi) + (X_n \wedge \xi), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

而 $X_n \wedge \xi \le \xi \in L^1$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\mathbb{E}[X_n \wedge \xi] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi]. \tag{4.6}$$

又由 $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi]$ 可知 $\mathbb{E}[X_n+\xi] \longrightarrow 2\mathbb{E}[\xi]$, 对 (4.5) 式两边积分，令 $n \longrightarrow \infty$ 得

$$\mathbb{E}[X_n \vee \xi] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi], \tag{4.7}$$

但 $|X_n-\xi|=(X_n\vee\xi)-(X_n\wedge\xi)$, 故由 (4.6) 及 (4.7) 可得 $\mathbb{E}[|X_n-\xi|] \longrightarrow 0$, 即 L^1 收敛.

对 $p \geq 1$, 关于 L^p 收敛性准则，我们有

定理 4.7 设 $p \in [1,\infty), \{X_n\} \subset L^p$ 且 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 ξ, 则以下命题等价:

1° $X_n \xrightarrow{L^p} \xi$;
2° $\{|X_n|^p, n \in \mathbb{N}\}$ 一致可积;
3° $\mathbb{E}[|X_n|^p] \longrightarrow \mathbb{E}[|\xi|^p]$.

证 因为我们有

$$|X_n|^p \xrightarrow{P} |\xi|^p,$$

故 2° $\Longleftrightarrow$ 3° 是定理 4.5 及 4.6 的推论. 由显然的不等式:

$$|X_n|^p \leq 2^{p-1}(|X_n-\xi|^p+|\xi|^p), \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$|X_n-\xi|^p \leq 2^{p-1}(|X_n|^p+|\xi|^p), \qquad n \in \mathbb{N}$$

可知 $\{|X_n|^p, n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积当且仅当 $\{|X_n-\xi|^p, n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积，故由定理 4.5 可知 1° $\Longleftrightarrow$ 2°.

习题 1.5 证明若 $1 \leq p < q < \infty, X_n \xrightarrow{P} \xi$, 且 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在 L^q 中有界，则 $X_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

习题 1.6 设 $p \in [1,\infty), \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，若 $X_n \xrightarrow{L^p} \xi$, 则

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}].$$

此结果表明条件期望算子在 L^p 中连续.

§5. 离散时间鞅和下鞅

我们已经弄清了 L^1 收敛性和一致可积性的关系. 有一类特殊的随机过程, 其 L^1 有界性蕴含 a.s. 收敛性, 因而对这类过程来说, 其 L^1 收敛性和一致可积性等价, 这类过程就是鞅. 本节将扼要地介绍离散时间参数的鞅论, 详细讨论可参看 Doob[1] 或 Neveu[2].

我们以 $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ 表示非负整数集, 并记 $\overline{\mathbb{N}}_0 \equiv \mathbb{N}_0\bigcup\{\infty\}$. 在基本概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中, 给出一族递增的子 σ- 代数 $\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_n, n\in\mathbb{N}_0\}$, 并记 $\mathcal{F}_\infty \equiv \vee_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}_n, \overline{\mathfrak{F}} \doteq \{\mathcal{F}_n, n\in\overline{\mathbb{N}}_0\}$. 随机过程 $X=\{X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$, 若对 $\forall n\in\mathbb{N}_0, X_n$ 为 $\mathcal{F}_n$ 可测, 则称为 $\mathfrak{F}$ 适应过程; 取值于 $\overline{\mathbb{N}}_0$ 的随机变量 τ, 若对 $\forall n\in\mathbb{N}_0, [\omega;\tau(\omega)=n]\in\mathcal{F}_n$, 则称为 $\mathfrak{F}$ 停时.

定义 5.1 可积 $\mathfrak{F}$ 适应过程 $X=\{X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$, 若对 $m,n\in\mathbb{N}_0, m<n$ 有

$$X_m = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \qquad \text{a.s.}, \tag{5.1}$$

称为 $\mathfrak{F}$ **鞅**; 若在上式中分别以 $\leq$ 或 $\geq$ 代替等号, 则分别称 X 为 $\mathfrak{F}$ **下鞅** 或 $\mathfrak{F}$ **上鞅** (当 $\mathfrak{F}$ 固定时, 有时略去 $\mathfrak{F}$; 当不提及 $\mathfrak{F}$ 时, 一般指相对于由过程本身产生的 σ- 代数流 $\mathfrak{F}^X$ 而言). 若对 $\forall n\in\mathbb{N}_0$ 有 $X_n\in L^p(p\geq 1)$, 称为 L^p **鞅**(或下鞅、上鞅); 若 X 满足 $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p]<\infty$, 则称为 L^p **有界鞅**(或下鞅、上鞅).

由定义可知, (5.1) 等价于

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_m] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_n], \qquad \forall F\in\mathcal{F}_m \tag{5.2}$$

(下鞅或上鞅情形分别以 $\leq$ 或 $\geq$ 代替等号). 若 X 为上鞅, 则 $-X\equiv\{-X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$ 为下鞅; 若 X 同时为上鞅及下鞅, 则 X 为鞅.

命题 5.2 若 $X=\{X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$ 为鞅, φ 为 $\mathbb{R}$ 上的凸函数 (或 X 为下鞅, φ 为非降凸函数) 且使 $\varphi(X_n)\in L^1(\forall n\in\mathbb{N}_0)$, 则 $\varphi(X)\equiv\{\varphi(X_n), n\in\mathbb{N}_0\}$ 为下鞅.

证 设 X 为鞅，由 (5.1) 及 Jensen 不等式有

$$\varphi(X_m) = \varphi(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m]) \le \mathbb{E}[\varphi(X_n)|\mathcal{F}_m] \qquad \text{a.s.}$$

$(m < n)$; 若 X 为下鞅且 φ 非降，上式等号改为不等号 $\le$, 故 $\varphi(X)$ 为下鞅. ∎

特别，若 $p \ge 1$, 取 $\varphi(x) = |x|^p$ 得

推论 1 若 X 为 L^p 鞅 $(p \ge 1)$, 则 $|X|^p \equiv \{|X_n|^p, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为下鞅.

对 $a \in \mathbb{R}$, 取 $\varphi(x) = x \vee a$, 则有

推论 2 若 X 为下鞅，$a \in \mathbb{R}$, 则 $X \vee a \equiv \{X_n \vee a, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为下鞅. 特别当 $a = 0$ 时有： $X^+ \equiv \{X_n^+, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为下鞅.

若 τ 为停时，我们定义

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{F \in \mathcal{F}_\infty; \forall n \in \mathbb{N}_0, F \cap [\tau = n] \in \mathcal{F}_n\}.$$

下面的定理表明，在 (5.1) 中的 m 和 n 可代以有界停时 σ 和 τ.

定理 5.3 (Doob 停止定理) 若 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为鞅 (下鞅), σ 、 τ 为有界停时且 $\sigma \le \tau$, 则

$$X_\sigma = \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] \qquad (\text{或} \le) \qquad \text{a.s.}, \tag{5.3}$$

因而有

$$\mathbb{E}[X_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau] \qquad (\text{或} \le) \qquad \text{a.s.}. \tag{5.4}$$

证 我们只证下鞅情形. 设 $\sigma \le \tau \le n, F \in \mathcal{F}_\sigma$. 则对 $k = 0, 1, \cdots, n$ 有 $F \bigcap [\sigma = k] \bigcap [\tau > k] \in \mathcal{F}_k$.

先假定 $\tau - \sigma \le 1$, 由下鞅性质有

$$\mathbb{E}[1_F(X_\tau - X_\sigma)] = \sum_{k=0}^n \int_{F \bigcap [\sigma=k] \bigcap [\tau>k]} (X_{k+1} - X_k) dP \ge 0.$$

在一般情形下，令 $\tau_k = \tau \wedge (\sigma + k) (k = 0, 1, \cdots, n)$, 则 $\sigma = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_n = \tau, \tau_{k+1} - \tau_k \le 1$ 且 $F \in \mathcal{F}_{\tau_k} (k = 0, 1, \cdots, n-1)$, 以 τ_k, τ_{k+1} 分别代替上述 σ 和 τ 即得

$$\mathbb{E}[1_F X_\sigma] \le \mathbb{E}[1_F X_{\tau_1}] \le \cdots \le \mathbb{E}[1_F X_\tau].$$

由于上式对 $\forall F\in\mathcal{F}_\sigma$ 均成立，故有 $X_\sigma\le \mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma]$ a.s.

定理 5.4 (极大值不等式) 若 $X=\{X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$ 为下鞅，则对 $c>0$ 及 $m\in\mathbb{N}_0$ 有

$$cP\{\max_{0\le n\le m} X_n\ge c\}\le \mathbb{E}[X_m^+], \tag{5.5}$$

$$cP\{\min_{0\le n\le m} X_n\le -c\}\le \mathbb{E}[|X_0|]+\mathbb{E}[|X_m|]. \tag{5.6}$$

若 $p\ge 1, X$ 为 L^p 鞅，则有

$$P\{\max_{0\le n\le m}|X_n|\ge c\}\le c^{-p}\mathbb{E}[|X_m|^p]; \tag{5.7}$$

若 $p>1, q$ 为其共轭指数，则有

$$\mathbb{E}[\max_{0\le n\le m}|X_n|^p]\le q^p\mathbb{E}[|X_m|^p], \tag{5.8}$$

此即

$$\|\max_{0\le n\le m}|X_n|\|_p\le q\|X_m\|_p. \tag{5.8'}$$

证 令

$$F\equiv\{\max_{0\le n\le m}X_n\ge c\},$$

$$\sigma=\begin{cases}\min\{n\le m;\ X_n\ge c\}, & \omega\in F,\\ m, & \omega\overline{\in} F,\end{cases}$$

则 $\sigma\le m$ 为有界停时，由定理 5.3 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_m]\ge\mathbb{E}[X_\sigma]&=\mathbb{E}[1_F X_\sigma]+\mathbb{E}[1_{F^c}X_m]\\ &\ge cP(F)+\mathbb{E}[1_{F^c}X_m],\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}cP(F)\le\mathbb{E}[X_m]-\mathbb{E}[1_{F^c}X_m]&=\mathbb{E}[1_F X_m]\\ &\le\mathbb{E}[X_m^+],\end{aligned} \tag{5.9}$$

得证 (5.5) 式. 类似地令

$$E \equiv \{\min_{0 \le n \le m} X_n \le -c\},$$

$$\tau = \begin{cases} \min\{n \le m; X_n \le -c\}, & \omega \in E, \\ m, & \omega \overline{\in} E, \end{cases}$$

可证

$$cP(E) \le -\boldsymbol{E}[X_0] + \boldsymbol{E}[\mathbf{1}_{E^c} X_m] \le \boldsymbol{E}[|X_0|] + \boldsymbol{E}[|X_m|]. \qquad (5.10)$$

若 X 为 L^p 鞅, 则 $|X|^p$ 为下鞅, 由 (5.5) 即得 (5.7). 当 $p > 1$ 时, 令 $\xi \equiv \max_{0 \le n \le m} |X_n|$, 由 (5.9) 式

$$cP[\xi \ge c] \le \boldsymbol{E}[\mathbf{1}_{(\xi \ge c)} |X_m|],$$

根据 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}[\xi^p] &= \boldsymbol{E}\Big[\int_0^{\xi} pc^{p-1} dc\Big] = \boldsymbol{E}\Big[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{(\xi \ge c)} pc^{p-1} dc\Big] \\ &= p\int_0^{\infty} c^{p-1} P(\xi \ge c) dc \\ &\le p\int_0^{\infty} \boldsymbol{E}[c^{p-2} \mathbf{1}_{(\xi \ge c)} |X_m|] dc \\ &= p\boldsymbol{E}\Big[\int_0^{\xi} c^{p-2} |X_m| dc\Big] = \frac{p}{p-1} \boldsymbol{E}[\xi^{p-1} |X_m|], \end{aligned}$$

由 $(p-1)q = p$ 及 Hölder 不等式得

$$\boldsymbol{E}[\xi^p] \le q\boldsymbol{E}[\xi^{p-1}|X_m|] \le q\Big(\boldsymbol{E}[|X_m|^p]\Big)^{1/p} \Big(\boldsymbol{E}[\xi^p]\Big)^{1/q},$$

此即 (5.8′) 式.

推论 若 $X = \{X_n, n \in \boldsymbol{N}_0\}$ 为上鞅, 则对 $c > 0$ 及 $m \in \boldsymbol{N}$ 有

$$cP\Big\{\max_{0 \le n \le m} X_n \ge c\Big\} \le \boldsymbol{E}[x_0] - \int_{\{\max_{0 \le n \le m} x_n < c\}} X_m dP. \qquad (5.5')$$

特别，若 X 为非负上鞅，则

$$cP\Big\{\max_{0\le n\le m} X_n \ge c\Big\} \le \mathbb{E}[X_0]. \qquad (5.6')$$

证 此时 $-X$ 为下鞅，且 $\{\max_{0\le n\le m} X_n \ge c\} = \{\min_{0\le n\le m}(-X_n) \le -c\}$. 应用 (5.10) 中第一个不等式即得 (5.5′).

为研究下鞅的收敛性质，对任意区间 $[a,b]$, 令

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \min\{n;\ X_n \le a\},\\
\tau_2 &= \min\{n \ge \tau_1;\ X_n \ge b\},\\
&\cdots\cdots\\
\tau_{2k+1} &= \min\{n \ge \tau_{2k};\ X_n \le a\},\\
\tau_{2k+2} &= \min\{n \ge \tau_{2k+1};\ X_n \ge b\}
\end{aligned}$$

(约定 $\min\{\emptyset\} = +\infty$). 则 $\{\tau_n\}$ 为递增的停时列，对 $m \in \mathbb{N}_0$, 令

$$U_m^X(a,b)(\omega) \equiv \max\{k; \tau_{2k}(\omega) \le m\}, \qquad (5.11)$$

它是序列 $\{X_0, X_1, \cdots, X_m\}$ 上穿区间 $[a,b]$ 的次数. 显然，$U_m^X(a,b)$ 为随机变量. 下面将对平均上穿次数作一个估计：

命题 5.5 设 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为下鞅，则对 $\forall m \in \mathbb{N}_0$ 及区间 $[a,b]$ 有

$$\mathbb{E}[U_m^X(a,b)] \le (b-a)^{-1}\mathbb{E}[(X_m - a)^+ - (X_0 - a)^+]. \qquad (5.12)$$

证 令 $Y = (X-a)^+$, 由命题 5.2 知 Y 为下鞅，且 $U_m^X(a,b) = U_m^Y(0, b-a)$, 故不妨设 $a = 0$ 及 X 非负. 令 $\tau_n' = \tau_n \wedge m (n \in \mathbb{N}_0)$, 当 $2k > m$ 时有

$$\begin{aligned}
X_m - X_0 &= \sum_{n=1}^{2k}(X_{\tau_n'} - X_{\tau_{n-1}'})\\
&= \sum_{n=1}^{k}(X_{\tau_{2n}'} - X_{\tau_{2n-1}'}) + \sum_{n=0}^{k-1}(X_{\tau_{2n+1}'} - X_{\tau_{2n}'}),
\end{aligned}$$

右边第一项不小于上穿区间次数 $U_m^X(0,b)$ 乘以区间长度 b; 由定理 5.3, 第二项之期望非负, 故

$$\mathbb{E}[X_m - X_0] \geq b\mathbb{E}[U_m^X(0,b)],$$

此即 (5.12) 式.

定理 5.6 设 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为下鞅, 满足

$$\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] < \infty, \tag{5.13}$$

则 $\{X_n\}$ a.s. 收敛, 其极限 $X_\infty \in L^1$. 为使增补 X_∞ 后的过程 $\overline{X} \equiv \{X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0\}$ 仍为下鞅, 必须且只须 $\{X_n^+, n \in \mathbb{N}_0\}$ 一致可积.

证 设 $U_\infty^X(a,b) \equiv \lim_{m\to\infty} U_m^X(a,b)$. 对固定 ω, 若数列 $\{X_n(\omega)\}$ 不收敛, 必存在有理数 r 和 s 使

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) < r < s < \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega),$$

这样一来, 序列 $\{X_n(\omega)\}$ 必然上穿区间 $[r,s]$ 无穷次, 即 $U_\infty^X(r,s)(\omega) = \infty$. 因此

$$[\omega; \{X_n(\omega)\} \text{ 不收敛}] = \bigcup_{\substack{r<s \\ r,s\in Q}} [\omega; U_\infty^X(r,s)(\omega) = \infty],$$

但由 (5.12) 及 (5.13) 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_m^X(r,s)] &\leq (s-r)^{-1}\mathbb{E}[(X_m - r)^+ - (X_0 - r)^+] \\ &\leq (s-r)^{-1}\left(\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] + |r|\right) < \infty,\end{aligned}$$

令 $m \longrightarrow \infty$ 得 $\mathbb{E}[U_\infty^X(r,s)] < \infty$, 因而 $P[U_\infty^X(r,s) = \infty] = 0$, 故 $\{X_n\}$ a.s. 收敛. 又因为

$$\mathbb{E}[|X_n|] = 2\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_n] \leq 2\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0],$$

故条件 (5.13) 等价于 $\{X_n\}$ 在 L^1 中有界. 由 Fatou 引理可知 $X_\infty \in L^1$.

现进一步假定 $\{X_n^+\}$ 一致可积. 此时对 $\forall a \in \mathbb{R}, \{X_n \vee a\}$ 一致可积, 由定理 4.5, 它 L^1 收敛于 $X_\infty \vee a$. 因为 $X \vee a$ 为下鞅, 故对 $n \in \mathbb{N}_0$ 有

$$\mathbb{E}[X_\infty \vee a|\mathcal{F}_n] = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}[X_m \vee a|\mathcal{F}_n] \geq X_n \vee a \qquad \text{a.s.},$$

令 $a \downarrow -\infty$ 得

$$\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] \geq X_n \qquad \text{a.s.}, \tag{5.14}$$

即 $\{X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0\}$ 为下鞅. 反之, 若 (5.14) 成立, 则由 Jensen 不等式, $\mathbb{E}[X_\infty^+|\mathcal{F}_n] \geq X_n^+$ a.s., 但由命题 4.4 知 $\{\mathbb{E}[X_\infty^+|\mathcal{F}_n], n \in \mathbb{N}_0\}$ 为一致可积族, 因而 $\{X_n^+, n \in \mathbb{N}_0\}$ 一致可积.

应用此结果于鞅, 得到以下定理:

定理 5.7 设 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ 为鞅, 则以下条件相互等价:

1° $\{X_n\}$ L^1 收敛;

2° $\exists\, \xi \in L^1$ 使对 $\forall n \in \mathbb{N}_0$ 有 $X_n = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$ a.s.;

3° $\{X_n\}$ 一致可积.

在此条件下有

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \qquad (\text{a.s. 及 } L^1),$$

且 $\overline{X} \equiv \{X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0\}$ 为鞅. 特别, 若 $p > 1, X$ 为 L^p 有界鞅, 则上述条件满足, 且

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \qquad (\text{a.s. 及 } L^p).$$

证 1° $\Longrightarrow$ 2°. 在 (5.1) 中令 $n \longrightarrow \infty$, 由条件期望为 L^1 中连续算子, 得 $X_m = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_m]$ a.s., $\forall m$. 取 $\xi = X_\infty$ 即得.

2° $\Longrightarrow$ 3°. 是命题 4.4 的推论.

3° $\Longrightarrow$ 1°. 由一致可积性可知在 L^1 中有界, 由定理 5.6, $\{X_n\}$ a.s. 收敛; 再由定理 4.5 即知 $\{X_n\} L^1$ 收敛.

设 X 为 L^p 有界鞅 $(p > 1)$, 由命题 4.3 推论 1, $\{X_n\}$ 一致可积, 因而 $\overline{X} = \{X_n, n \in \overline{\mathbb{N}}_0\}$ 为鞅. 由 Fatou 引理, $\mathbb{E}[|X_\infty|^p] \leq$

$\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$. 根据命题 5.2 推论 1, $\{|X_n|^p, n \in \overline{\mathbb{N}}_0\}$ 为下鞅, 易见 $\{|X_n|^p\}$ 一致可积, 故由定理 4.7 得证 L^p 收敛性.

现在设 $\mathbb{N}_0^- \equiv \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}, \mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0^-\}$ 仍为一族递增的子 σ- 代数. 考虑定义在 $\mathbb{N}_0^-$ 上的 $\mathfrak{F}$ 下鞅 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0^-\}$, 我们有以下结果:

定理 5.8 对下鞅 $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}_0^-\}$, 当 $n \longrightarrow -\infty$ 时 $\{X_n\}$ 永远 a.s. 收敛. 若

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbb{E}[X_n] = c > -\infty, \tag{5.15}$$

则 $\{X_n\}$ 一致可积, 因而 L^1 收敛.

证 a.s. 收敛性之证明类似于定理 5.6. 现设条件 (5.15) 满足. 由于当 $n \longrightarrow -\infty$ 时, $\{\mathbb{E}[X_n]\}$ 单调下降, 故对 $\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}_0^-$ 使 $\mathbb{E}[X_m] - c < \varepsilon/2$. 于是, 对 $\lambda > 0$ 及 $n \le m$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{[|X_n|>\lambda]} |X_n| dP = \int_{[X_n>\lambda]} X_n dP - \int_{[X_n<-\lambda]} X_n dP \\
&= \int_{[X_n>\lambda]} X_n dP + \int_{[X_n\ge-\lambda]} X_n dP - \mathbb{E}[X_n] \\
&\le \int_{[X_n>\lambda]} X_m dP + \int_{[X_n\ge-\lambda]} X_m dP - \mathbb{E}[X_m] + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \int_{[|X_n|>\lambda]} |X_m| dP + \varepsilon/2,
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
P[|X_n| > \lambda] &\le \lambda^{-1}\mathbb{E}[|X_n|] = \lambda^{-1}(2\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_n]) \\
&\le \lambda^{-1}(2\mathbb{E}[X_0^+] - c),
\end{aligned}$$

故可选 λ 足够大使

$$\sup_{n\le m} \int_{[|X_n|>\lambda]} |X_m| dP \le \varepsilon/2 \text{ 及 } \max_{n>m} \int_{[|X_n|>\lambda]} |X_n| dP \le \varepsilon,$$

(因为大于 m 的负整数只有有限个), 于是

$$\sup_{n\in \mathbb{N}_0^-}\int_{[|X_n|>\lambda]}|X_n|dP\le\varepsilon.$$

§6. 连续时间鞅和下鞅, Doléans 测度

现在讨论连续时间参数的情形. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备概率空间, $\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为满足通常条件的子 σ- 代数流. 类似于离散时间参数情形, 我们先给出鞅的定义:

定义 6.1 可积 $\mathfrak{F}$ 适应过程 $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$, 若对 $s,t\in\mathbb{R}_+,s<t$, 有

$$X_s=\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\qquad(\text{或}\le,\ge)\qquad\text{a.s.},\tag{6.1}$$

称为 $\mathfrak{F}$ 鞅 (或 下鞅、上鞅). 类似地定义 L^p 鞅及 L^p 有界鞅等.

首先, 我们讨论下鞅轨道的正则性质.

命题 6.2 设 $X=\{X_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为下鞅, $\mathbb{Q}_+$ 为非负有理数集, 则 X 的几乎所有轨道在 $\mathbb{Q}_+$ 上有界, 且对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 下列极限存在:

$$\lim_{\mathbb{Q}_+\ni r\downarrow t}X_r\qquad\text{及}\qquad\lim_{\mathbb{Q}_+\ni r\uparrow t}X_r.\tag{6.2}$$

证 任意固定 $u>0$. 设 $[0,u]$ 中的全体有理数 (按某种次序排列) 为 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 将其中前 n 个数依大小顺序排列得: $s_1<s_2<\cdots<s_n$, 记 $s_0=0,s_{n+1}=u,Y_k=X_{s_k}(k=0,1\cdots,n+1)$, 则 $\{Y_k,0\le k\le n+1\}$ 为离散时间下鞅. 由 (5.5) 及 (5.6) 式可得

$$P\{\max_{1\le k\le n}|Y_k|\ge c\}\le 2c^{-1}(\mathbb{E}[|X_0|]+\mathbb{E}[|X_u|]).\tag{6.3}$$

再由 (5.12) 式得

$$\mathbb{E}[U_n^Y(a,b)]\le(b-a)^{-1}\mathbb{E}[(X_u-a)^+].\tag{6.4}$$

因为 (6.3) 及 (6.4) 对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立，故有

$$P\{\sup_{r \in Q \cap [0,u]} |X_r| \geq c\} \leq 2c^{-1}(\mathbb{E}[|X_0|] + \mathbb{E}[|X_u|]), \tag{6.5}$$

及

$$\mathbb{E}[U_\infty^{\widetilde{X}}(a,b)] \leq (b-a)^{-1}\mathbb{E}[(X_u - a)^+] < \infty, \tag{6.6}$$

其中 $\widetilde{X}$ 为 X 在 $Q \bigcap [o,u]$ 上的限制．在 (6.5) 中令 $c \uparrow \infty$, 得证有界性；在 (6.6) 中使 a, b 取遍一切有理数 $(a < b)$, 得证极限 (6.2) 存在且有限．

定理 6.3 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为下鞅，则 X 存在右连左极修正之充分必要条件是： $\mathbb{E}[X_t]$ 作为 t 之函数在 $\mathbb{R}_+$ 右连续．特别，一切鞅存在右连左极修正．

证 由前一命题可知，除开一个 P 零集 N 外， X 的所有轨道沿 Q_+ 存在右极限．令

$$\widetilde{X}_t(\omega) \equiv \begin{cases} \lim_{Q_+ \ni r \downarrow t} X_r(\omega), & 若\ \omega \overline{\in} N, \\ 0, & 若\ \omega \in N, \end{cases} \tag{6.7}$$

显然 $\widetilde{X}_t$ 为 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ 可测，故 $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为 $\mathfrak{F}$ 适应过程，且所有轨道为右连左极．

设 $s < t$. 在 Q_+ 中选二序列 $\{s_n\}$ 及 $\{t_n\}$, 使 $s_n \downarrow s$ 及 $t_n \downarrow t$, 且保持 $s_1 < t$, 则对 $\forall F \in \mathcal{F}_s$ 有

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_{s_n}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_{t_n}].$$

由定理 5.8 可知，$\{X_{s_n}\}$ 及 $\{X_{t_n}\}$ 均一致可积，在上式中令 $n \longrightarrow \infty$, 得

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F \widetilde{X}_s] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_F \widetilde{X}_t],$$

即 $\widetilde{X}$ 为下鞅．对 $\forall F \in \mathcal{F}_t$, 在下式中令 $n \longrightarrow \infty$:

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_t] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_F X_{t_n}],$$

得

$$\mathbb{E}[1_F X_t] \le \mathbb{E}[1_F \widetilde{X}_t], \qquad \forall F \in \mathcal{F}_t.$$

但 X_t 及 $\widetilde{X}_t$ 均为 $\mathcal{F}_t$ 可测，故有 $X_t \le \widetilde{X}_t$ *a.s.*; 又由 $\{X_{t_n}\}$ 一致可积，故 $\mathbb{E}[X_{t_n}] \downarrow \mathbb{E}[\widetilde{X}_t]$. 为使 $\widetilde{X}$ 为 X 之修正，必须且只须 $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\widetilde{X}_t]$, 亦即 $\mathbb{E}[X_{t_n}] \downarrow \mathbb{E}[X_t]$, 根据 $E[X_t]$ 的单调性，此等价于右连续性质. 若 X 存在另一右连左极修正 Y, 则由刚才所证可知 $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t]$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续函数.

特别，若 X 为鞅，则 $\mathbb{E}[X_t]$ 为常数，故有上述结论.

根据这一定理，我们以后均**假定所考虑的鞅为右连续**. 和命题 6.2 的证明一样，用离散逼近的方法，可以证明连续时间参数情形的极大值不等式：

定理 6.4 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为右连续下鞅，则对 $c > 0$ 及 $u > 0$ 有

$$cP\{\sup_{0\le t\le u} X_t \ge c\} \le \mathbb{E}[X_u^+], \tag{6.8}$$

$$cP\{\inf_{0\le t\le u} X_t \le -c\} \le \mathbb{E}[|X_0|] + \mathbb{E}[|X_u|], \tag{6.9}$$

若 X 为右连续上鞅，则

$$cP\left\{\sup_{0\le t\le u} X_t \ge c\right\} \le \mathbb{E}[X_0] - \int_{\{\sup_{0\le t\le u} X_t < c\}} X_u dP, \tag{6.8$'$}$$

特别，若 X 为右连续非负上鞅，则

$$cP\left\{\sup_{0\le t\le u} X_t \ge c\right\} \le \mathbb{E}[X_0]. \tag{6.9$'$}$$

若 $p > 1, X$ 为 L^p 鞅，则

$$P\{\sup_{0\le t\le u} |X_t| \ge c\} \le c^{-p}\mathbb{E}[|X_u|^p]. \tag{6.10}$$

在 $p > 1$ 时有

$$\|\sup_{0\le t\le u} |X_t|\|_p \le q\|X_u\|_p, \tag{6.11}$$

其中 q 为 p 的共轭指数.

关于收敛性质，类似地可得到以下定理：

定理 6.5 设 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为右连续下鞅. 若

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathbb{E}[X_t^+]<\infty,\tag{6.12}$$

则当 $t\uparrow\infty$ 时， X_t a.s. 收敛于某可积随机变量 X_∞; 若 $\{X_t^+,t\in\mathbb{R}_+\}$ 一致可积，则 $\overline{X}\equiv\{X_t,t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ 为下鞅；若 $\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 一致可积，则

$$\lim_{t\uparrow\infty}X_t=X_\infty\qquad(\text{a.s. 及 }L^1).$$

定理 6.6 设 $X=\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为鞅，则以下条件相互等价：

1° 当 $t\uparrow\infty$ 时， X_t L^1 收敛；

2° $\exists\,\xi\in L^1$, 使对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $X_t=\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$ a.s.;

3° $\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 一致可积.

在此条件下有

$$\lim_{t\uparrow\infty}X_t=X_\infty\qquad(\text{a.s. 及 }L^1),$$

且 $\overline{X}\equiv\{X_t,t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ 为鞅.

特别，若 $p>1,X$ 为 L^p 有界鞅，则上述条件满足，且

$$\lim_{t\uparrow\infty}X_t=X_\infty\qquad(\text{a.s. 及 }L^p).$$

为讨论连续参数情形下的 Doob 停止定理，回忆可料 σ- 代数的构造：在 §1 − §2 中，定义了

$$\mathcal{R}\equiv\{[0]\times F_0,F_0\in\mathcal{F}_0;(s,t]\times F,F\in\mathcal{F}_s,s<t\},$$

及

$$\mathcal{I}_f\equiv\{[[0_F]],F\in\mathcal{F}_0;((\sigma,\tau]],\sigma\le\tau,\sigma,\tau\in\mathcal{T}_f\},$$

其中 $\mathcal{T}_f$ 表示只取有限多个不同实数值的停时总体，命题 2.8 已经证明， $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{I}_f)=\sigma(\mathcal{R})$, 且 $\mathcal{R}\subset\mathcal{I}_f$. 容易验证， $\mathcal{R},\mathcal{I}_f$ 均为半

环，设 $\mathfrak{A}$ 为由 $\mathcal{R}$ 生成的环，即由一切不相交的可料矩形的有限并集所构成的集合系.

定义 6.7 对任一可积适应过程 $X=\{X_t, t\in \mathbb{R}_+\}$，在 $\mathcal{R}$ 上定义集函数 μ_X 如下：

$$\begin{cases} \mu_X([0]\times F_0)=0, & F_0\in\mathcal{F}_0, \\ \mu_X((s,t]\times F)=\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_t-X_s)], & s<t,\ F\in\mathcal{F}_s. \end{cases} \tag{6.13}$$

它可开拓于 $\mathfrak{A}$ 上为有限可加集函数，称为由 X 生成的**容积**. 若 $\mu_X=0$ (或 $\geq 0, \leq 0$)，则 X 称为**鞅**(或**下鞅**、**上鞅**)；若 μ_X 为有界变差 (即可表示为两个非负容积之差)，则 X 称为**拟鞅**；若 μ_X 可开拓于可料 σ- 代数 $\mathcal{P}$ 上成为 σ 可加集函数，则称为由 X 在 $\mathcal{P}$ 上生成的 Doléans **测度**.[1)]

习题 1.7 验证 $\mathcal{R}$ 为一半环及由 (6.13) 所定义的集函数 μ_X 在 $\mathcal{R}$ 上为有限可加 (因而可保持有限可加性开拓于 $\mathfrak{A}$ 上).

注 定义 6.7 和定义 6.1 是一致的. 例如关于下鞅的定义：

$$\mu_X((s,t]\times F)=\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_t-X_s)]\geq 0, \qquad s<t, F\in\mathcal{F}_s,$$

等价于条件：

$$s<t\Longrightarrow \mathbb{E}[(X_t-X_s)|\mathcal{F}_s]\geq 0 \qquad \text{a.s.},$$

亦即

$$s<t\Longrightarrow X_s\leq \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \qquad \text{a.s.}.$$

由定义可知，Doléans 测度 (如果存在的话) 在不足道集上无负荷，因而无区别的过程有相同的 Doléans 测度. 存在 Doléans 测度 μ_X 之必要条件是： X 为拟鞅. 由于拟鞅可表示为两个下鞅之差，故下面着重讨论由下鞅生成的非负的 Doléans 测度. 先给出一个引理：

---

1)或称 Föllmer 测度 (见 Jacod[1],p.189).

引理 6.8 $\mathcal{I}_f \subset \mathfrak{A}$, 且对任一可积适应过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 及 $((\sigma, \tau]] \in \mathcal{I}_f$, 有

$$\mu_X(((\sigma, \tau]]) = \mathbb{E}[X_\tau - X_\sigma]. \tag{6.14}$$

证 只须证 $\sigma = 0$ 的情形. 设 τ 取值为 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 令 $t_0 = 0$, 则

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} t_k \mathbf{1}_{[\tau = t_k]} = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \mathbf{1}_{[\tau > t_{k-1}]},$$

因而

$$((0, \tau]] = \bigcup_{k=1}^{n} \Big\{ (t_{k-1}, t_k] \times [\tau > t_{k-1}] \Big\} \in \mathfrak{A}.$$

按定义 (6.13) 有

$$\begin{aligned}
\mu_X(((0, \tau]]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{(\tau > t_{k-1})} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) \Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{(\tau = t_k)} (X_{t_k} - X_0) \Big] = \mathbb{E}[X_\tau - X_0].
\end{aligned}$$

下面是关于右连续下鞅和鞅的 Doob 停止定理:

定理 6.9 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为右连续下鞅 (鞅), $\sigma \le \tau$ 为两个停时, 若下列条件之一满足:

1° $\exists u \in \mathbb{R}_+$ 使 $\tau \le u$ a.s.;

2° $\{X_t^+, t \in \mathbb{R}_+\}$ 一致可积 ($\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 一致可积);

则有

$$X_\sigma \le \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \qquad (或 =) \qquad \text{a.s.}. \tag{6.15}$$

注 在条件 2° 下, 因存在极限 X_∞, 且 $\overline{X} \equiv \{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ 为下鞅 (鞅), 因而当 $\tau = \infty$ 时, X_τ 有意义.

证 只证下鞅情形，先设 $\sigma,\tau\in\mathcal{T}_f$，由引理 6.8，对 $\forall F\in\mathcal{F}_\sigma$ 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_\tau-X_\sigma)]&=\mathbb{E}[X_\tau-X_{\tau\wedge\sigma|_F}]\\&=\mu_X(((\tau\wedge\sigma|_F,\tau]])\geq 0,\end{aligned}$$

亦即 $\mathbb{E}[X_\tau-X_\sigma|\mathcal{F}_\sigma]\geq 0$ a.s.，由于 X_σ 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 可测，此即 (6.15) 式.

现设 σ,τ 为有限停时，由命题 2.4，存在 $\mathcal{T}_f$ 中的停时列 $\{\sigma_n\}$ 及 $\{\tau_n\}$，使 $\sigma_n\downarrow\sigma,\tau_n\downarrow\tau$. 不妨设 $\sigma_n\leq\tau_n$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 成立 (否则可以 $\sigma_n\wedge\tau_n$ 代替 σ_n). 因为对 $\forall a\in\mathbb{R},X\vee a$ 仍为右连续下鞅，故对 $n\in\mathbb{N}$ 及 $F\in\mathcal{F}_\sigma\subset\mathcal{F}_{\sigma_n}$，按刚才所证，有

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_{\sigma_n}\vee a)]\leq\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_{\tau_n}\vee a)]. \tag{6.16}$$

在条件 2° 下，由定理 6.5，$\overline{X}\equiv\{X_t,t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ 为下鞅，存在 "终端变量" $X_\infty\in L^1$；在条件 1° 下则可由 X_u 充当此终端变量，我们统一记成 X_f. 因为

$$a\leq X_{\tau_n}\vee a\leq\mathbb{E}[X_f\vee a|\mathcal{F}_{\tau_n}]\qquad\text{a.s.},$$

且 $\{\mathbb{E}[X_f\vee a|\mathcal{F}_{\tau_n}],n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积 (命题 4.4)，故 $\{X_{\tau_n}\vee a,n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积. 同理，$\{X_{\sigma_n}\vee a,n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积. 在 (6.16) 中令 $n\longrightarrow\infty$，由 X 的轨道右连续性得

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_\sigma\vee a)]\leq\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(X_\tau\vee a)],\qquad F\in\mathcal{F}_\sigma,$$

再令 $a\downarrow-\infty$ 得

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_FX_\sigma]\leq\mathbb{E}[\mathbf{1}_FX_\tau],\quad F\in\mathcal{F}_\sigma,$$

此即 (6.15) 式.

习题 1.8 在定理 6.9 中，设 σ,τ 为任意两个有界停时 (当 2° 满足时，有界性限制可以取消)，则有

$$X_{\sigma\wedge\tau}\leq\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma]\qquad(\text{或}=)\qquad\text{a.s.}.$$

习题 1.9 设 X 为右连续适应过程，则 X 为鞅的充要条件是：$\forall \tau \in \mathcal{T}_b$，$X_\tau$ 可积且 $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

下面是 Doob 停止定理的一种特别有用的形式：

定理 6.10 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为右连续 $\mathfrak{F}$ 下鞅 (鞅)，$\{\sigma_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一族递增的有界 $\mathfrak{F}$ 停时 (若定理 6.9 中的条件 2° 满足，则有界性限制可取消). 对 $t \in \mathbb{R}_+$，令

$$\widetilde{X}_t \equiv X_{\sigma_t}, \qquad \widetilde{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_{\sigma_t}, \tag{6.17}$$

$\widetilde{X} \equiv \{\widetilde{X}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$，$\widetilde{\mathfrak{F}} \equiv \{\widetilde{\mathcal{F}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$. 则 $\widetilde{X}$ 为 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 下鞅 (鞅).

特别，若 τ 为有限 $\mathfrak{F}$ 停时，则停止过程

$$X^\tau \equiv \{X_{\tau\wedge t}, t \in \mathbb{R}_+\}$$

为 $\mathfrak{F}$ 下鞅 (鞅).

证 前一结论直接由定理 6.9 推出. 特别，当 $\sigma_t = \tau \wedge t$ 时，有 $\widetilde{\mathfrak{F}} = \{\mathcal{F}_{\tau\wedge t}, t \in \mathbb{R}_+\}$，于是 X^τ 为 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 下鞅 (鞅). 但对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $\mathcal{F}_{\tau\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$，故 X^τ 也是 $\mathfrak{F}$ 适应过程，由习题 1.8，对 $s < t$ 有

$$X_{\tau\wedge s} = X_{(\tau\wedge t)\wedge s} \leq \mathbb{E}[X_{\tau\wedge t}|\mathcal{F}_s] \qquad (\text{或} =) \qquad \text{a.s.},$$

亦即 X^τ 为 $\mathfrak{F}$ 下鞅 (鞅).

为考察下鞅生成 Doléans 测度的充分必要条件，我们引进如下定义：

定义 6.11 以 $\mathcal{T}^u$ 及 $\mathcal{T}_f^u$ 分别表示 $\mathcal{T}$ 及 $\mathcal{T}_f$ 中取值于区间 $[0, u]$ 的 (有界) 停时全体. 可测过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$，若 $\{X_\tau, \tau \in \mathcal{T}\}$ 一致可积，称为 (D) **类过程**；若对 $\forall u > 0$，$\{X_\tau, \tau \in \mathcal{T}^u\}$ 一致可积，则称为局部 (D) 类过程或 **(LD) 类过程**.

注 由于 $\mathcal{T}$ 及 $\mathcal{T}^u$ 中元素分别为 $\mathcal{T}_f$ 及 $\mathcal{T}_f^u$ 中元素序列的极限，故定义中 $\mathcal{T}$ 及 $\mathcal{T}^u$ 可分别改为 $\mathcal{T}_f$ 及 $\mathcal{T}_f^u$.

定理 6.12 设 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为右连续下鞅. 则当且仅当 X 为 (LD) 类过程时，X 所生成的容积 μ_X 可开拓为 $\mathcal{P}$ 上 Doléans 测度，且对一切有界停时 $\sigma, \tau (\sigma \leq \tau)$ 有

$$\mu_X(((\sigma, \tau]]) = \mathbb{E}[X_\tau - X_\sigma]. \tag{6.18}$$

证 我们只证明充分性 (这在应用上已经足够, 必要性的证明可参看 Métivier[1]). 为此, 只须对一切 $u>0$ 证明: 当 $\{X_\tau, \tau\in\mathcal{T}_f^u\}$ 为一致可积族时, μ_X 可开拓为 $\mathcal{P}\bigcap[[0,u]]$ 上的测度, 且 (6.18) 对一切 $\sigma,\tau\in\mathcal{T}^u$ 成立.

设 $\{X_\tau,\tau\in\mathcal{T}_f^u\}$ 一致可积. 令

$$\mathcal{I}_f^u\equiv\{[[0_F]],\ F\in\mathcal{F}_0;\ ((\sigma,\tau]],\ \sigma\le\tau,\sigma,\tau\in\mathcal{T}_f^u\},$$

$\mathfrak{A}_u$ 为由 $\mathcal{I}_f^u$ 生成之代数. 由命题 2.8, $\mathcal{P}\bigcap[[0,u]]=\sigma(\mathfrak{A}_u)$; 由引理 6.8, μ_X 可开拓为 $\mathfrak{A}_u$ 上的有限可加集函数, 为使其能开拓为 $\mathcal{P}\bigcap[[0,u]]$ 上的测度, 只须证明对集合序列 $\{A_n\}\subset\mathfrak{A}_u, A_n\downarrow\emptyset$ 有 $\mu_X(A_n)\downarrow 0$.

由于在 $[[0_F]]$ 型集合上 μ_X 为 0, 故不妨假定 A_n 可表为不相交随机区间的有限并:

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{m_n}((\sigma_{n,k},\tau_{n,k}]],$$

其中 $\sigma_{n,k}\le\tau_{n,k}$, $\sigma_{n,k}$, $\tau_{n,k}\in\mathcal{T}_f^u$ $(n\in\mathbb{N},k=1,2,\cdots,m_n)$. 由右连续性及一致可积性假定, 对任给 $\varepsilon>0$ 及 $\forall n$, $\forall k$, 可选 $\sigma'_{n,k}\in\mathcal{T}_f^u$, 使 $\sigma_{n,k}\le\sigma'_{n,k}\le\tau_{n,k}$, 在集合 $[\sigma_{n,k}<\tau_{n,k}]$ 上有 $\sigma_{n,k}<\sigma'_{n,k}<\tau_{n,k}$, 且

$$\mu_X(((\sigma_{n,k},\sigma'_{n,k}]])=\mathbb{E}[X(\sigma'_{n,k})-X(\sigma_{n,k})]<\varepsilon m_n^{-1}2^{-n}.$$

令

$$\overline{A}_n\equiv\bigcup_{k=1}^{m_n}[[\sigma'_{n,k},\tau_{n,k}]],$$

$$\widetilde{A}_n\equiv\bigcup_{k=1}^{m_n}((\sigma'_{n,k},\tau_{n,k}]],$$

$$\overline{E}_n\equiv\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,$$

$$\widetilde{E}_n\equiv\bigcap_{k=1}^{n}\widetilde{A}_k,$$

则 $\widetilde{A}_n, \widetilde{E}_n \in \mathfrak{A}_u$, 且 $\widetilde{E}_n \subset \overline{E}_n \subset \overline{A}_n \subset A_n, \widetilde{A}_n \subset A_n$. 因

$$\mu_X(A_n - \widetilde{A}_n) \leq \sum_{k=1}^{m_n} \mathbb{E}[X(\sigma'_{n,k}) - X(\sigma_{n,k})] < \varepsilon 2^{-n},$$

故有

$$\mu_X(A_n - \widetilde{E}_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_X(A_k - \widetilde{A}_k) < \varepsilon, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.19}$$

但对 $\forall\omega$, $\{\overline{E}_n\}$ 之 ω- 截口 $\{(\overline{E}_n)_\omega\}$ 为紧集列, 因为 $\overline{E}_n \downarrow \emptyset$, 故 $\exists n_0(\omega)$, 当 $n > n_0(\omega)$ 时有 $(\overline{E_n})_\omega = \emptyset$, 当然更有 $(\widetilde{E}_n)_\omega = \emptyset$.

令 $G_n \equiv \pi(\widetilde{E}_n)$, 则 $G_n \downarrow \emptyset$. 易见存在 $\sigma_n, \tau_n \in \mathcal{T}_f^u$, 使 $\widetilde{E}_n \subset ((\sigma_n, \tau_n]] \subset (0, u] \times G_n$. 于是

$$\mu_X(\widetilde{E}_n) \leq \mathbb{E}[1_{G_n}(X_{\tau_n} - X_{\sigma_n})],$$

再由一致可积性假定, 当 $n \longrightarrow \infty$ 时上式右边趋于 0. 考虑到 (6.19) 式中的 ε 的任意性, 即有 $\mu_X(A_n) \downarrow 0$, 因而 μ_X 可开拓为 $\mathcal{P} \bigcap [[0, u]]$ 上之测度.

设 $\tau \in \mathcal{T}^u$. 由命题 2.4, 存在 $\{\tau_n\} \subset \mathcal{T}_f^u$ 使 $\tau_n \downarrow \tau$. 由右连续及一致可积性假定及引理 6.8 得

$$\begin{aligned}
\mu_X(((0, \tau]]) &= \lim_{n\to\infty} \mu_X(((0, \tau_n]]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau_n} - X_0] \\
&= \mathbb{E}[X_\tau - X_0],
\end{aligned}$$

于是 (6.18) 对 $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{T}^u$ 成立.

下一定理给出了常见的 (LD) 类下鞅的例子:

定理 6.13 一切右连续非负下鞅属于 (LD) 类. 特别, 一切右连续鞅属于 (LD) 类; 一致可积非负右连续下鞅属于 (D) 类.

证 设 X 为右连续非负下鞅. 则对 $\forall u > 0$ 及 $\tau \in \mathcal{T}^u$, 由定理 6.9 得

$$0 \leq X_\tau \leq \mathbb{E}[X_u | \mathcal{F}_\tau] \qquad \text{a.s.},$$

但 $\{\mathbb{E}[X_u|\mathcal{F}_\tau],\tau\in\mathcal{T}^u\}$ 为一致可积族 (命题 4.4), 故 $\{X_\tau,\tau\in\mathcal{T}^u\}$ 一致可积, 因而 X 是 (LD) 类过程. 若 $\{X_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 一致可积, 则由定理 6.5, 存在极限 X_∞, 且 $\overline{X}\equiv\{X_t,t\in\overline{\mathbb{R}}_+\}$ 为下鞅, 于是对一切 $\tau\in\mathcal{T}^u$, 由定理 6.9 得

$$0\leq X_\tau\leq\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_\tau]\qquad \text{a.s.},$$

因而 $\{X_\tau,\tau\in\mathcal{T}\}$ 一致可积, X 是 (D) 类过程.

若 X 为鞅, 则 $|X|$ 为非负下鞅, 因此属于 (LD) 类.

关于鞅论进一步的结果, 可参看 Dellacherie-Meyer[2] 或严加安 [2]. Doléans 测度首先由 Doléans-Dade[1] 引进, 定理 6.12 在一般拓扑可测空间的推广可参看黄志远 [1].

第二章 随机积分

§7. 伊藤的随机积分定义

本章中我们将要定义以下形式的随机积分：

$$X(t,\omega) = \int_0^t H(s,\omega)dM(s,\omega), \qquad t \in \mathbb{R}_+,\ \omega \in \Omega, \tag{7.1}$$

其中 $H = \{H_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 和 $M = \{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 都是随机过程. 我们知道，若对一切 $\omega \in \Omega, H(\cdot,\omega)$ 关于 $M(\cdot,\omega)$ 的 Lebesgue- Stieltjes 积分存在，这种定义并没有什么困难，它就是按轨道的积分. 但是正如引论中提到的，当 M 是 Brown 运动或者是和 Brown 运动那样具有极不规则的轨道的随机过程时，定义按轨道的积分就出现困难. 也许，当 H 的轨道充分光滑 (例如连续可微) 时，人们可以利用分部积分：

$$\int_0^t H_s dM_s = H_t M_t - H_0 M_0 - \int_0^t \dot{H}_s M_s ds$$

来克服这一困难，但不幸的是，被积过程 H 的轨道也常常是同样不光滑的 (例如方程 (0.13) 中那个随机积分). 为了说明困难所在，我们试图来定义和计算以下的随机积分：

$$X_t = \int_0^t W_s dW_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7.2}$$

其中 $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 是一维 Brown 运动.

我们知道， Brown 运动几乎所有轨道在任一有限区间上的变差都是无限的. 但是，值得注意的是，其 平方变差 却是有限的.

设 $t>0, \pi_t^n=\{t_j^n, j=0,1,\cdots,k_n\}$ 为区间 $[0,t]$ 的一个分割序列：

$$\pi_t^n: 0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{k_n}^n=t, \qquad n\in \mathbb{N}_0 \tag{7.3}$$

令

$$\delta(\pi_t^n)\equiv \max_{1\le j\le k_n}(t_j^n-t_{j-1}^n), \tag{7.4}$$

对 $\mathbb{R}_+$ 上任一实值函数 f, 令

$$\pi_t^n(f)\equiv\sum_{j=1}^{k_n}[f(t_j^n)-f(t_{j-1}^n)]^2. \tag{7.5}$$

假定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 满足通常条件，我们有

命题 7.1 设 $W=\{W_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动，则对 $\forall t>0$ 及 $[0,t]$ 之分割序列 $\{\pi_t^n\}$, 当 $\delta(\pi_t^n)\longrightarrow 0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\pi_t^n(W.)=t \qquad (L^2 \text{ 收敛 }). \tag{7.6}$$

证 对 $n\in\mathbb{N}$ 及 $j=1,2,\cdots,k_n$, 记

$$\triangle_j^n\equiv[W(t_j^n)-W(t_{j-1}^n)]^2-(t_j^n-t_{j-1}^n),$$

则

$$\mathbb{E}[\triangle_j^n|\mathcal{F}_{t_{j-1}^n}]=0;$$

$$\mathbb{E}[(\triangle_j^n)^2]=2(t_j^n-t_{j-1}^n)^2.$$

因此

$$\mathbb{E}[(\pi_t^n(W.)-t)^2]=\mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{k_n}\triangle_j^n)^2]$$

$$=\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}[(\triangle_j^n)^2]=2\sum_{j=1}^{k_n}(t_j^n-t_{j-1}^n)^2$$

$$\le 2\delta(\pi_t^n)t\longrightarrow 0 \qquad (n\longrightarrow\infty).$$

现在回头来看随机积分 (7.2), 形式上应用分部积分法则得

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2. \tag{7.7}$$

但是，应用这个法则之前必须假定上述积分作为 Riemann-Stieltjes 积分存在，即不论如何选取分割序列 $\{\pi_t^n\}$ 和分点 $u_j^n \in [t_{j-1}^n, t_j^n]$, 只要 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$, 以下和数 a.s. 收敛：

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^{k_n} W(u_j^n)(W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)). \tag{7.8}$$

但这显然是不可能的，因为 W 的轨道不是有界变差函数．那么，S_n 是否均方收敛？为此，我们将 S_n 改写成如下形式：

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}[W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)]^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{k_n}[W(u_j^n) - W(t_{j-1}^n)]^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{k_n}[W(t_j^n) - W(u_j^n)][W(u_j^n) - W(t_{j-1}^n)]. \end{aligned}$$

由命题 7.1, 当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时上式第一个和均方收敛于 $t/2$; 利用前两阶矩的计算容易看出上式第三个和均方收敛于 0; 至于第二个和，我们有

$$\mathbb{E}[\sum_{j=1}^{k_n}(W(u_j^n) - W(t_{j-1}^n))^2] = \sum_{j=1}^{k_n}(u_j^n - t_{j-1}^n). \tag{7.9}$$

如同命题 7.1 一样 (只是用 u_j^n 代替了 t_j^n), 可以证明第二个和均方收敛于 (7.9) 的右端．但是，它显然依赖于分点 $\{u_j^n\}$ 的选取．例如，我们选

$$u_j^n = (1-\alpha)t_{j-1}^n + \alpha t_j^n \qquad (0 \le \alpha \le 1, j = 1, \cdots, k_n,\ n \in \mathbb{N}),$$

则当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时， S_n 均方收敛于

$$\frac{1}{2}W(t)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)t. \tag{7.10}$$

因此，为使积分 (7.2) 有意义， **分点必须有特定的选取方式**. 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，即 $u_j^n = \frac{1}{2}(t_{j-1}^n + t_j^n)$ 为区间 $[t_{j-1}^n, t_j^n]$ 的中点，我们得到公式 (7.7); 但当 $\alpha = 0$ 时，亦即 $u_j^n = t_{j-1}^n$ 为区间 $[t_{j-1}^n, t_j^n]$ 的左端点，我们得到

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t). \tag{7.11}$$

公式 (7.7) 的好处在于和通常的微积分公式一致，但公式 (7.11) 有一个更引人注目的性质，那就是：按这样的定义， $X_t = \int_0^t W_s dW_s$ 是一个连续鞅.

命题 7.2 设 $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动，$M_t \equiv W_t^2 - t$, $t \in \mathbb{R}_+$, 则 W 及 M 均为连续 $\mathfrak{F}$ 鞅.

证 显然 W 及 M 都是可积、连续、$\mathfrak{F}$ 适应过程. 按 $\mathfrak{F}$ Brown 运动定义 1.6, 对 $s < t, W_t - W_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，因而

$$\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0 \qquad \text{a.s.},$$

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s \qquad \text{a.s.},$$

故有

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s) + W_s|\mathcal{F}_s] = W_s \qquad \text{a.s.},$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s + W_s)^2 - t|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2W_s\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + W_s^2 - t \\ &= t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s \qquad \text{a.s.}, \end{aligned} \tag{7.12}$$

即 W 和 M 均为 $\mathfrak{F}$ 鞅. ∎

N.Wiener 很早就定义了对 Brown 运动的随机积分，但他只利用了 Brown 运动增量的正交性质，因而被积函数只限于非随机的

函数；伊藤清 [2] 首次定义了很广一类随机过程关于 Brown 运动的随机积分，他充分利用了 Brown 运动的鞅性，虽然其后这种随机积分被大大地推广了，但从本质上来说，还是根据伊藤清的思想，因而这类随机积分都称作伊藤积分.

这一节里，我们将介绍伊藤清的随机积分定义. 因为它是以后各节给出的一般随机积分的特殊情形，所以在这里不去严格证明其每一细节而着重阐述其基本思想.

仍然假定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 满足通常条件， W 为一维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动，固定 $T>0$，考虑如下的随机积分：

$$I_T(H)=\int_0^T H(t,\omega)dW(t,\omega), \tag{7.13}$$

其中 $H=\{H_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一 $\mathfrak{F}$ 循序过程，满足可积性条件：

$$\|H\|_T^2\equiv\mathbb{E}[\int_0^T|H_t|^2dt]<\infty. \tag{7.14}$$

我们以 $\mathcal{L}_T^2$ 表示定义在 $[0,T]$ 上满足 (7.14) 的 $\mathfrak{F}$ 循序过程 (在范数 $\|\cdot\|_T$ 意义下的等价类) 所构成的空间，显然，它就是 Hilbert 空间：

$$L^2([0,T]\times\Omega,\ \mathcal{M}\cap[[0,T]],\ \lambda\times P),$$

其中 λ 表示 $[0,T]$ 上的 Lebesgue 测度.

考虑 $\mathcal{L}_T^2$ 中的简单过程：

$$H(t,\omega)=\begin{cases}H_0(\omega), & 若\ t=0,\\ H_k(\omega), & 若\ t_k<t\le t_{k+1}(k=0,1,\cdots,n-1),\end{cases} \tag{7.15}$$

其中 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$ 为 $[0,T]$ 的一个固定的 (不依赖于 ω 的) 分划， $H_k(\omega)$ 为 $\mathcal{F}_{t_k}$ 可测随机变量 $(k=0,1,\cdots,n-1)$. 我们不加证明地叙述一个结果：

命题 7.3 形如 (7.15) 的简单过程类构成 $\mathcal{L}_T^2$ 中的稠密线性子空间. 即对 $H \in \mathcal{L}_T^2$, 存在简单过程序列 $\{H^{(n)}\} \subset \mathcal{L}_T^2$, 使

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2 dt] = 0. \tag{7.16}$$

因此, 为定义随机积分 (7.13), 可以先从简单过程着手. 对简单过程 (7.15), 我们按 Stieltjes 积分来定义其随机积分:

$$I_T(H) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} H_k[W(t_{k+1}) - W(t_k)], \tag{7.17}$$

由于 H_k 为 $\mathcal{F}_{t_k}$ 可测, 因而与 $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ 相互独立, 于是

$$\mathbb{E}[I_T(H)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[H_k]\mathbb{E}[W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0. \tag{7.18}$$

为计算 $\mathbb{E}[(I_T(H))^2]$, 我们注意到当 $k < j$ 时有 $t_k < t_{k+1} \le t_j < t_{j+1}$, 由于 $H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))H_j$ 为 $\mathcal{F}_{t_j}$ 可测, 因而与 $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ 相互独立, 于是

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\
=&\mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))H_j]\mathbb{E}[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = 0,
\end{aligned} \tag{7.19}$$

即 $[I_T(H)]^2$ 展开后交叉项之期望为 0, 因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(I_T(H))^2] &= \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} H_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[H_k^2]\mathbb{E}[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} H_k^2(t_{k+1} - t_k)] \\
&= \mathbb{E}[\int_0^T |H(t)|^2 dt],
\end{aligned} \tag{7.20}$$

这样，我们就证明了以下命题：

命题 7.4 对简单过程 (7.15), 按 (7.17) 定义的随机积分 $I_T(H) \in L^2(\Omega)$, 且

$$\|I_T(H)\|_2 = \|H\|_T. \tag{7.21}$$

很清楚，如果将 I_T 看成一个从 $\mathcal{L}_T^2$ 中一个稠密线性子空间 (即简单过程所构成的线性子空间) 到 $L^2(\Omega)$ 中的映象，它是一个等距映象，因而可以连续开拓为 $\mathcal{L}_T^2$ 到 $L^2(\Omega)$ 中的等距同构映象．这就是关于 Brown 运动 W 的伊藤积分．换句话说，我们有

定义 7.5 若 $H \in \mathcal{L}_T^2, \{H^{(n)}\}$ 为 $\mathcal{L}_T^2$ 中简单过程序列，满足 (7.16), 则

$$I_T(H) \equiv \lim_{n\to\infty} I_T(H^{(n)}) \qquad (L^2(\Omega) \text{ 中极限 }) \tag{7.22}$$

称为过程 H 关于 Brown 运动 W 的 **伊藤积分**：

$$I_T(H) = \int_0^T H_t dW_t. \tag{7.23}$$

由开拓的唯一性可知此定义不依赖于简单过程序列 $\{H^{(n)}\}$ 的选择.

现在我们对此定义给出如下几点评注：

注 1 在 (7.18) 及 (7.19) 的推导中，利用了 W 的增量的独立性质．但实质上只要 W 是鞅， (7.18) 及 (7.19) 仍然成立，例如在 (7.19) 中，只要取关于 σ- 代数 $\mathcal{F}_{t_j}$ 的条件期望就得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))H_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\
&= \mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))H_j\mathbb{E}(W(t_{j+1}) - W(t_j)|\mathcal{F}_{t_j}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此这个定义提供了一条线索，告诉我们有可能一般地定义关于鞅的随机积分.

注 2 Brown 运动 W 是连续 L^2 鞅 (当只考虑有限区间 $[0,T]$ 上的 Brown 运动时，由于 $\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}[|W(t)|^2] = T < \infty$, 甚至还

是 L^2 有界鞅, 或称平方可积鞅), 因此 W^2 是连续非负下鞅, 由定理 6.13, 它是 (LD) 类过程 (当只考虑有限区间 $[0,T]$ 时, 甚至还是 (D) 类过程). 由定理 6.12, 它所生成的容积 μ_{W^2} 可开拓为 $\mathcal{P}$ 上的测度.

对可料矩形 $(s,t]\times F\in\mathcal{R}(s<t, F\in\mathcal{F}_s)$, 按定义 6.7 有

$$\begin{aligned}\mu_{W^2}((s,t]\times F)&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(W_t^2-W_s^2)]\\&=\mathbb{E}[\mathbf{1}_F(W_t-W_s)^2]+2\mathbb{E}[\mathbf{1}_F W_s(W_t-W_s)]\\&=(t-s)P(F)=(\lambda\times P)((s,t]\times F),\end{aligned}$$

其中 λ 为 $\mathbb{R}_+$ 上之 Lebesgue 测度. 由此可见 μ_{W^2} 和 $\lambda\times P$ 在 $\mathcal{R}$ 上重合, 由开拓的唯一性, 它们在 $\mathcal{P}$ 上重合.

注意到由 (7.15) 所定义的 H 是左连右极 $\mathfrak{F}$ 适应过程, 因而也是 $\mathfrak{F}$ 可料过程 (这里 H_k 为 $\mathcal{F}_{t_k}$ 可测, 而且 t_k 为区间的左端点是关键). 所以 (7.20) 式表明:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(I_T(H))^2]&=\int_\Omega\int_0^T|H(t,\omega)|^2dtdP\\&=\int_{[0,T]\times\Omega}|H(t,\omega)|^2d\mu_{W^2},\end{aligned}$$

即 I_T 为从 $L^2([0,T]\times\Omega,\mathcal{P}\bigcap[[0,T]],\mu_{W^2})$ 到 $L^2(\Omega)$ 中的等距映象. 因此, 作为伊藤积分的第一步推广, 应当考虑可料过程关于 L^2 有界鞅的随机积分.

注 3 设 $t\in[0,T]$, 我们若对形如 (7.15) 的过程 H 定义

$$I_t(H)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}H_k[W(t_{k+1}\wedge t)-W(t_k\wedge t)],\tag{7.24}$$

则当 $t<t_k$ 时

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1})-W(t_k))|\mathcal{F}_t]\\&=\mathbb{E}[H_k\mathbb{E}(W(t_{k+1})-W(t_k)|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_t]=0\qquad\text{a.s.};\end{aligned}$$

而当 $t \geq t_k$ 时

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[H_k(W(t_{k+1})-W(t_k))|\mathcal{F}_t]\\&=H_k\mathbb{E}[W(t_{k+1})-W(t_k)|\mathcal{F}_t]\\&=H_k[W(t_{k+1}\wedge t)-W(t_k\wedge t)] \qquad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

于是由 (7.17) 及 (7.24) 得

$$\mathbb{E}[I_T(H)|\mathcal{F}_t]=I_t(H) \qquad \text{a.s.}. \tag{7.25}$$

对于一般的 $H\in\mathcal{L}_T^2$, 利用简单过程序列逼近, 由于条件期望算子在 $L^2(\Omega)$ 中连续 (习题 1.6), 仍有 (7.25) 式. 这个事实表明 $\{I_t(H), 0\leq t\leq T\}$ 为一鞅 (甚至还是 L^2 有界鞅), 这个过程仍然称为 H 关于 W 的伊藤积分 (或称 伊藤不定积分). 从这个观点看来, 随机积分又是从 $\mathcal{L}_T^2$ 到 L^2 有界鞅空间的一个映象, 在 L^2 有界鞅空间中适当定义范数 (在下一节将看到, 它是一个 Hilbert 空间), 也可以证明它是等距同构映象.

注 4 设 $M=\{M_t, t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一 L^2 鞅, 对任一数 $T>0$, 其停止过程 $M^T\equiv\{M_{T\wedge t}, t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 L^2 有界鞅. 更进一步, 可以考虑这样的过程 M, 即存在一列停时 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s. 使对每个 n, 停止过程 $M^{\tau_n}\equiv\{M_{\tau_n\wedge t}, t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 L^2 有界鞅. 这种过程称为局部 L^2 鞅. 利用这种局部化, 可以使定义进一步推广. 在 Brown 运动情形, 伊藤清将被积过程类扩大到了满足条件:

$$\int_0^t H_s^2 ds<\infty, \qquad \forall t\in\mathbb{R}_+ \qquad \text{a.s.} \tag{7.26}$$

的可测 $\mathfrak{F}$ 适应过程 H 全体 (其总体记为 $\mathcal{L}_{loc}^2$).

下一节, 我们将详细考察 L^2 有界鞅的空间.

§8. 平方可积鞅空间 $\mathfrak{M}^2$

我们以 $\mathfrak{M}^2$ 表示右连续平方可积鞅 (即 L^2 有界鞅) 全体所构成的线性空间. 由定理 6.6, 若 $M=\{M_t, t\in\mathbb{R}_+\}\in\mathfrak{M}^2$, 则存在极限:

$$M_\infty\equiv\lim_{t\uparrow\infty}M_t \qquad (\text{a.s. 及 } L^2).$$

显然，$M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. 又 $M^2 \equiv \{M_t^2, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一致可积、非负、右连续下鞅，由定理 6.13, 它是 (D) 类过程. 记其生成的 Doléans 测度为 μ_{M^2}, 显然，μ_{M^2} 为 $\mathcal{P}$ 上的有限测度.

定理 8.1 平方可积鞅空间 $\mathfrak{M}^2$ 中定义内积

$$(M, N)_{m^2} \equiv \mathbb{E}[M_\infty N_\infty], \qquad M, N \in \mathfrak{M}^2, \tag{8.1}$$

则构成 Hilbert 空间.

证 对 $M \in \mathfrak{M}^2$, 令 $\psi(M) \equiv M_\infty$. 则 ψ 为 $\mathfrak{M}^2$ 到 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ 的映象. 反之, 对 $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, 令 M 为鞅 $\{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t], t \in \mathbb{R}_+\}$ 的右连续修正 (由定理 6.3 这样的修正总是存在), 由 Jensen 不等式, 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$M_t^2 \le \mathbb{E}[\xi^2|\mathcal{F}_t] \qquad \text{a.s.},$$

从而

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[M_t^2] \le \mathbb{E}[\xi^2] < \infty,$$

即 $M \in \mathfrak{M}^2$. 此外，对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 及 $F \in \mathcal{F}_t$ 有

$$\mathbb{E}[1_F M_t] = \mathbb{E}[1_F \xi].$$

由 $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 的一致可积性，在上式中令 $t \uparrow \infty$ 得

$$\mathbb{E}[1_F M_\infty] = \mathbb{E}[1_F \xi], \qquad \forall F \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t.$$

注意到 $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ 是一个代数，应用单调类定理 (参看附录 A) 可知上式对一切 $F \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t)$ 也成立. 但 M_∞ 及 ξ 均为 $\mathcal{F}_\infty$ 可测，故

$$\xi = M_\infty = \psi(M) \qquad \text{a.s.}.$$

设另有 $N \in \mathfrak{M}^2$, 使 $\psi(N) = N_\infty = \xi$ a.s., 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $N_t = \mathbb{E}[N_\infty|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t] = M_t$ a.s., 由 M 及 N 的右连续性可知

M 与 N 无区别. 因而 ψ 为 $\mathfrak{M}^2$ 到 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ 上的双方单值映射. (8.1) 式可写为

$$(M,N)_{m^2}=(\psi(M),\psi(N))_{L^2},\qquad M,N\in\mathfrak{M}^2,$$

故 ψ 保持内积不变. 既然 $\mathfrak{M}^2$ 通过 ψ 和 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ 同构, 所以它本身也是 Hilbert 空间.

我们以 $\mathfrak{M}_0^2$ 表示 $\mathfrak{M}^2$ 中一切满足 $M_0=0$ 的鞅 M 全体, 它显然是 $\mathfrak{M}^2$ 的一个闭子空间. 再以 $\mathfrak{M}_c^2$ 表示 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的连续鞅全体, 它是 $\mathfrak{M}_0^2$ 的一个线性子空间, 称为 **连续平方可积鞅空间**(严格地说, 是零初值连续平方可积鞅空间). 更进一步可以证明:

命题 8.2 $\mathfrak{M}_c^2$ 是 $\mathfrak{M}_0^2$ 的闭子空间.

证 设 $\{M^{(n)}\}\subset\mathfrak{M}_c^2$, 且在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中收敛于 $M\in\mathfrak{M}_0^2$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|M^{(n)}-M\|_{m^2}=\lim_{n\to\infty}\|M_\infty^{(n)}-M_\infty\|_{L^2}=0.$$

选取子序列 $\{M^{(n_k)}\}$ 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|M_\infty^{(n_k)}-M_\infty\right\|_{L^2}<\infty,$$

由于 $M^{(n_k)}-M$ 为 L^2 有界鞅, 在极大值不等式 (6.11) 中 $(p=q=2)$ 令 $u\longrightarrow\infty$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|M_t^{(n_k)}-M_t\right|\Big]&=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{E}\Big[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|M_t^{(n_k)}-M_t\right|\Big]\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\Big\|\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|M_t^{(n_k)}-M_t\right|\Big\|_{L^2}\\&\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\|M_\infty^{(n_k)}-M_\infty\right\|_{L^2}<\infty,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left|M_t^{(n_k)}-M_t\right|<\infty\qquad\text{a.s.},$$

即对 a.a.ω, $\left\{M_t^{(n_k)}(\omega)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 对 $t\in\mathbb{R}_+$ 均匀收敛于 $M_t(\omega)$, 因而 $M\in\mathfrak{M}_c^2$. 这就证明了 $\mathfrak{M}_c^2$ 是闭子空间. ∎

对 Hilbert 空间 $\mathfrak{M}_0^2$ 作正交分解:

$$\mathfrak{M}_0^2=\mathfrak{M}_c^2\oplus(\mathfrak{M}_c^2)^{\perp}, \tag{8.2}$$

并记 $\mathfrak{M}_d^2=(\mathfrak{M}_c^2)^{\perp}$, 称为 **纯断平方可积鞅空间.**

对 $M,N\in\mathfrak{M}_0^2$, 因

$$MN=\frac{1}{2}[(M+N)^2-(M^2+N^2)] \tag{8.3}$$

为非负、右连续、一致可积下鞅 $\frac{1}{2}(M+N)^2$ 及 $\frac{1}{2}(M^2+N^2)$ 之差, 故 $MN=\{M_tN_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一致可积拟鞅. 定义

$$\mu_{MN}\equiv\frac{1}{2}[\mu_{(M+N)^2}-\mu_{M^2}-\mu_{N^2}]. \tag{8.4}$$

容易看出, μ_{MN} 是拟鞅 MN 生成的 Doléans (符号) 测度, 且对任意固定的可料集 A, $\mu_{MN}(A)$ 关于 M 及 N 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的对称双线性泛函. 更进一步有以下的 **Kunita-Watanabe 不等式**:

命题 8.3 对一切 $A\in\mathcal{P}$ 及 $M,N\in\mathfrak{M}_0^2$ 有

$$|\mu_{MN}(A)|\le[\mu_{M^2}(A)]^{\frac{1}{2}}[\mu_{N^2}(A)]^{\frac{1}{2}}; \tag{8.5}$$

若 X,Y 为两个可料过程, 则

$$\int_A|XY||d\mu_{MN}|\le\left(\int_A X^2d\mu_{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_A Y^2d\mu_{N^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8.6}$$

其中 $\int_\bullet|d\mu_{MN}|$ 表示 μ_{MN} 的全变差.

证 对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 由 (8.4) 得

$$0\le\mu_{(M+tN)^2}(A)=\mu_{M^2}(A)+2t\mu_{MN}(A)+t^2\mu_{N^2}(A). \tag{8.7}$$

上式右边关于 t 的二次三项式不可能有相异实根，所以判别式不能为正，即 (8.5) 式成立.

令 $\lambda \equiv \int_{\bullet}|d\mu_{MN}| + \mu_{M^2} + \mu_{N^2}$，则 μ_{MN}, μ_{M^2} 及 μ_{N^2} 均关于 λ 绝对连续，设它们对 λ 的 Radon- Nikodym 导数分别为 R, U 及 V. 由 (8.7) 得

$$0 \leq U + 2tR + t^2V, \qquad \forall t \in \mathbb{Q},\ \text{a.e.}[\lambda],$$

根据上面同样的推理，有

$$|R| \leq \sqrt{UV} \qquad \text{a.e.}[\lambda].$$

为证 (8.6) 式，只须考虑右边有限的情况．由 Schwarz 不等式即得

$$\begin{aligned}\int_A |XY||d\mu_{MN}| &= \int_A |XY||R|d\lambda \leq \int_A |XY|\sqrt{UV}d\lambda \\ &\leq \Big(\int_A X^2Ud\lambda\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_A Y^2Vd\lambda\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\int_A X^2d\mu_{M^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_A Y^2d\mu_{N^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

注 因为 $\mu_{M^2}(\mathbb{R}_+ \times \Omega) = \mathbb{E}[M_\infty^2] = \|M\|_{m^2}^2$，故由 (8.5) 有

$$|\mu_{MN}(A)| \leq \|M\|_{m^2}\|N\|_{m^2}, \tag{8.8}$$

可见 $\mu_{MN}(A)$ 关于 M 及 N 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 上有界双线性泛函.

为定义可料过程关于平方可积鞅的随机积分，我们首先定义可料集的示性函数 (最简单的可料过程) 的随机积分．它们构成了 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的一族正交投影算子，是可料 σ 代数 $\mathcal{P}$ 上的谱测度．为叙述并证明下面的重要定理，先回忆一下 Hilbert 空间正交投影算子的一些性质.

设 $\mathbb{H}$ 为实 Hilbert 空间， $Proj\mathbb{H}$ 为其上正交投影算子全体，其中可定义如下运算：对 $\Pi, \Pi_1, \Pi_2 \in Proj\mathbb{H}$，设其所对应的子空间分别为 $\mathbb{G}, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$，则

1° $\Pi^{\perp}$ 为向 $\mathbb{G}$ 的正交补空间 $\mathbb{G}^{\perp}$ 的投影;

2° $\Pi_1 \wedge \Pi_2$ 为向 $\mathbb{G}_1 \bigcap \mathbb{G}_2$ 的投影;

3° $\Pi_1 \vee \Pi_2$ 为向 $\mathbb{G}_1 \bigcup \mathbb{G}_2$ 所产生的闭子空间的投影.

我们知道, 当且仅当 Π_1 和 Π_2 可交换时有

$$\Pi_1 \wedge \Pi_2 = \Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1;$$

当且仅当 Π_1 和 Π_2 正交 (即 $\Pi_1\Pi_2 = 0$) 时有

$$\Pi_1 \vee \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_2;$$

一般地, 在 Π_1 和 Π_2 可交换时有

$$\Pi_1 \vee \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_1\Pi_2.$$

一般说来, 关于 $\wedge$ 及 $\vee$ 运算的分配律未必成立. 若正交投影族 $\{\Pi_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ 关于运算 $\wedge, \vee$ 及 $\perp$ 封闭, 包含 0 及 I(恒等算子) 且分配律成立, 则构成一个布尔代数. 可以证明 (例如参看 Beltrametti-Cassinelli[1]), 在上述条件下, 当且仅当其中一切正交投影可交换时分配律成立, 因而构成布尔代数. 正交投影算子序列强收敛的极限仍为正交投影, 若此算子布尔代数关于可列运算 (在强拓扑意义下) 封闭, 则构成布尔 σ- 代数.

定义 8.4 设 U 为一集合, $\mathcal{A}$ 为其中子集布尔代数, $\mathbb{H}$ 为一实 Hilbert 空间, 从 $\mathcal{A}$ 到 $Proj\mathbb{H}$ 中的一个布尔代数的同态映象 Π, 若满足 $\Pi(U) = I$(恒等算子), 则称为定义于 $\mathcal{A}$ 上的 $\mathbb{H}$ 中的 **谱测度**; 若对一切 $h, g \in \mathbb{H}$, 纯量值集函数 $(h, \Pi(\cdot)g)_H$ 在 $\mathcal{A}$ 上为 σ- 可加, 则称此谱测度为 σ- 可加.

我们的目的是要构造定义于可料 σ- 代数 $\mathcal{P}$ 上的 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的一个 σ- 可加谱测度.

定理 8.5 Hilbert 空间 $\mathfrak{M}_0^2$ 中存在唯一的一族正交投影算子 $\{\Pi(A), A \in \mathcal{P}\}$, 它是定义于 $\mathcal{P}$ 上的 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的 σ- 可加谱测度, 对一切 $A \in \mathcal{P}$ 及 $M, N \in \mathfrak{M}_0^2$ 满足:

$$\|\Pi(A)M\|_{m^2}^2 = \mu_{M^2}(A) \tag{8.9}$$

及
$$(\Pi(A)M,N)_{m^2}=\mu_{MN}(A). \tag{8.10}$$
证 由命题 2.8, $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{I}_b)$, 其中
$$\mathcal{I}_b\equiv\{[[0_F]],F\in\mathcal{F}_0;\ ((\sigma,\tau]],\sigma\le\tau,\sigma,\tau\in\mathcal{T}_b\}.$$
易见 $\mathcal{I}_b$ 为一半环，对 $A=[[0_F]]\in\mathcal{I}_b$ 和 $M\in\mathfrak{M}_0^2$ 令
$$\Pi(A)M\equiv 0\qquad(\text{恒等于 0 的鞅}); \tag{8.11}$$
对 $A=((\sigma,\tau]]\in\mathcal{I}_b$ 和 $M\in\mathfrak{M}_0^2$, 则令
$$\Pi(A)M\equiv M^\tau-M^\sigma(\text{停止于 }\tau\text{ 及 }\sigma\text{ 的鞅}). \tag{8.12}$$
由定理 6.10,M^τ 及 M_σ 为鞅，又由极大值不等式 (6.11)($p=q=2$) 得
$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathbb{E}[M_{\tau\wedge t}^2]\le\mathbb{E}[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}M_t^2]\le 4\mathbb{E}[M_\infty^2]<\infty,$$
因而 M^τ, $M^\sigma\in\mathfrak{M}_0^2$, $\Pi(A)M=M^\tau-M^\sigma\in\mathfrak{M}_0^2$, 且对 $\forall N\in\mathfrak{M}_0^2$ 有
$$\begin{aligned}(\Pi(A)M,N)_{m^2}&=\mathbb{E}[(M_\infty^\tau-M_\infty^\sigma)N_\infty]\\&=\mathbb{E}[(M_\tau-M_\sigma)N_\infty]\\&=\mathbb{E}[M_\tau\mathbb{E}(N_\infty|\mathcal{F}_\tau)]-\mathbb{E}[M_\sigma\mathbb{E}(N_\infty|\mathcal{F}_\sigma)]\\&=\mathbb{E}[M_\tau N_\tau-M_\sigma N_\sigma]\qquad(\text{Doob 停止定理 6.9})\\&=\mu_{MN}(A).\end{aligned}$$
最后一个等式是由于 μ_{MN} 是拟鞅 MN 生成之 Doléans 测度，而拟鞅可表为两个下鞅之差，再由定理 6.12 即得．因此，对 $A\in\mathcal{I}_b$, 由 (8.11) 及 (8.12) 定义的算子 $\Pi(A)$ 满足 (8.10).

现设 $A_1=((\sigma_1,\tau_1]]\in\mathcal{I}_b,A_2=((\sigma_2,\tau_2]]\in\mathcal{I}_b$, 容易验证, $A_1\bigcap A_2=(((\sigma_1\wedge\tau_2)\vee(\sigma_2\wedge\tau_1),\tau_1\wedge\tau_2]]\in\mathcal{I}_b$, 于是对 $\forall M\in\mathfrak{M}_0^2$ 有
$$\begin{aligned}\Pi(A_2)\Pi(A_1)M&=\Pi(A_2)(M^{\tau_1}-M^{\sigma_1})\\&=(M^{\tau_1}-M^{\sigma_1})^{\tau_2}-(M^{\tau_1}-M^{\sigma_1})^{\sigma_2}\\&=M^{\tau_1\wedge\tau_2}-(M^{\sigma_1\wedge\tau_2}+M^{\sigma_2\wedge\tau_1}-M^{\sigma_1\wedge\sigma_2})\\&=M^{\tau_1\wedge\tau_2}-M^{(\sigma_1\wedge\tau_2)\vee(\sigma_2\wedge\tau_1)}\\&=\Pi(A_1\cap A_2)M.\end{aligned} \tag{8.13}$$

对于 A_1 或 A_2 为 $[[0_F]]$ 型集合时，上式显然成立. 特别当 $A_1 = A_2 = A$ 时，有 $\Pi(A)\Pi(A) = \Pi(A)$(幂等性). 既然对 $A \in \mathcal{P}, \mu_{MN}(A)$ 关于 M 及 N 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的有界、对称、双线性泛函，它由 (8.10) 唯一地决定 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的一个有界自共轭算子 $\Pi(A)$. 由刚才所证，当 $A \in \mathcal{I}_b$ 时，此算子和 (8.11) 及 (8.12) 所定义的算子重合，且由 (8.13) 可知它们是可交换的正交投影算子.

显然 $\Pi(A)$ 关于 A 在半环 $\mathcal{I}_b$ 上具有有限可加性质，因而可保持有限可加性唯一地开拓到由 $\mathcal{I}_b$ 所产生的环 $\mathcal{A}_b$ 上且使 (8.10) 成立. 特别在 (8.10) 中令 $N = M$, 便得到 (8.9).

设 $\{A_n\} \subset P$ 且 $A_n \downarrow A$. 由 (8.10) 可知 $\Pi(A_n)$ 弱收敛于 $\Pi(A)$. 但对 $M \in \mathfrak{M}_0^2$, 当 $m \geq n$ 时有

$$\begin{aligned}(\Pi(A_m)M, M)_{m^2} &= \mu_{M^2}(A_m) \leq \mu_{M^2}(A_n) \\ &= (\Pi(A_n)M, M)_{m^2},\end{aligned}$$

由此单调性质可知 $\Pi(A_n)$ 必强收敛于 $\Pi(A)$, 于是当 $\{\Pi(A_n)\}$ 是正交投影算子序列时， $\Pi(A)$ 亦然. 对 $A_n \uparrow A$ 的情形可同样讨论. 这样，凡使 $\Pi(A)$ 为正交投影算子的集合 $A \in \mathcal{P}$ 构成一个单调类，它既然包含环 $\mathcal{A}_b$, 必定包含由 $\mathcal{A}_b$ 产生的 σ- 环 (实际上就是 σ- 代数 $\mathcal{P}$). 因此，由 (8.10) 决定的算子族 $\{\Pi(A), A \in \mathcal{P}\}$ 为一族正交投影. 显然， $\Pi(\emptyset) = 0, \Pi(\mathbb{R}_+ \times \Omega) = I$. 由 (8.10) 立即看出，它是定义于 $\mathcal{P}$ 上的 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的 σ- 可加谱测度. ∎

定义 8.6 设 $M, N \in \mathfrak{M}_0^2$. 若 MN 为鞅 (或者等价地， $\mu_{MN} \equiv 0$), 则称 M 与 N **强正交**，记为 $M \perp\!\!\!\perp N$.

注 对 $A \in \mathcal{P}$, 若以 $\mathfrak{M}_A^2$ 表示投影 $\Pi(A)$ 所对应的闭子空间，则由 (8.10) 可知，当且仅当 M 与 N 在每一个闭子空间 $\mathfrak{M}_A^2$ 中的投影彼此正交时，有 $M \perp\!\!\!\perp N$. 特别取 $A = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 即由强正交性推出它们在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中正交.

定义 8.7 设 Q 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 的闭子空间. 若 Q 关于一切投影 $\{\Pi(A), A \in \mathcal{P}\}$ 不变，即

$$M \in Q,\ A \in \mathcal{P} \Longrightarrow \Pi(A)M \in Q, \tag{8.14}$$

则称 Q 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 的稳定子空间.

命题 8.8 设 Q 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 之闭子空间. 则 Q 为稳定子空间之充要条件是

$$M \in \mathfrak{M}_0^2,\ M \perp Q \Longrightarrow M \perp\!\!\perp Q. \tag{8.15}$$

证 必要性. 设 Q 稳定且 $M \perp Q$, 即对 $\forall N \in Q$ 有 $(M,N)_{m^2} = 0$. 但由 (8.14), 对 $\forall A \in \mathcal{P}$ 有 $\Pi(A)N \in Q$, 因此 $\mu_{MN}(A) = (M, \Pi(A)N)_{m^2} = 0$, 即 $M \perp\!\!\perp N$.

充分性. 设 (8.15) 满足且 $M \in Q$. 对 $\mathfrak{M}_0^2$ 作正交分解: $\mathfrak{M}_0^2 = Q \oplus Q^{\perp}$. 若 $N \in Q^{\perp}$, 则由 (8.15), $N \perp\!\!\perp M$, 即对 $\forall A \in \mathcal{P}$ 有 $(\Pi(A)M, N)_{m^2} = \mu_{MN}(A) = 0$, 因而 $\Pi(A)M \perp N$, 亦即 $\Pi(A)M \in Q$. 于是按 (8.14), Q 为稳定子空间. ∎

习题 2.1 证明稳定子空间之正交补空间仍是稳定子空间.

例 2.1 设 $A \in \mathcal{P}$, 则 $\mathfrak{M}_A^2$ 为稳定子空间.

例 2.2 $\mathfrak{M}_c^2$ 及 $\mathfrak{M}_d^2$ 均为稳定子空间.

证 由定义式 (8.11) 及 (8.12) 可知, 对 $A \in \mathcal{I}_b, M \in \mathfrak{M}_c^2$, 显然有 $\Pi(A)M \in \mathfrak{M}_c^2$, 由 $\mathfrak{M}_c^2$ 为闭线性子空间, 利用单调类定理可证对 $A \in \mathcal{P}, M \in \mathfrak{M}_c^2$ 也有 $\Pi(A)M \in \mathfrak{M}_c^2$, 即 $\mathfrak{M}_c^2$ 为稳定子空间, 再由习题 2.1 可知, $\mathfrak{M}_d^2$ 也是稳定子空间. ∎

§9. 平方可积鞅随机积分

本节中我们要定义随机积分 (7.1), 其中的 $M \in \mathfrak{M}_0^2, H$ 为可料过程且满足一定的可积性条件. 作为积分的定义, 我们自然要求它: 1° 具有线性性质; 2° 具有某种意义下的连续性质; 3° 当 (7.1) 作为轨道的 Stieltjes 积分存在时, 应当和我们的定义一致. 在前一节实际上已经定义了可料随机区间系 $\mathcal{I}_b$ 中随机区间的示性函数 $\mathbf{1}_{((\sigma,\tau]]}$ 关于平方可积鞅 M 的随机积分为 $M^\tau - M^\sigma$(参看 (8.12) 式), 即

$$\int_{[0,t]} \mathbf{1}_{((\sigma,\tau]]}(s,\omega)dM(s,\omega) = M_{\tau\wedge t}(\omega) - M_{\sigma\wedge t}(\omega), \tag{9.1}$$

这和按轨道的 Stieltjes 积分是一致的. 接着, 我们将此定义推广到了一切可料集的示性函数, 构造了 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的一个定义于 $\mathcal{P}$ 上的谱测度. 很自然地, 我们会想到, 一般可料过程关于平方可积鞅的随机积分应当是关于这个谱测度的谱积分. 下面就来详细讨论这种随机积分的定义和性质.

设 $M \in \mathfrak{M}_0^2$. 记 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_{M^2})$ 为 $\mathcal{H}_M^2$, 这就是我们要考察的被积过程空间. 显然它的大小依赖于 M.

定理 9.1 对 $M \in \mathfrak{M}_0^2$, $H \in \mathcal{H}_M^2$, 存在唯一的元素 $X \in \mathfrak{M}_0^2$, 满足:

$$(X,N)_{m^2} = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} H d\mu_{MN}, \qquad \forall N \in \mathfrak{M}_0^2. \tag{9.2}$$

证 记 (9.2) 右边为 $\psi(N)$. 由 μ_{MN} 关于 M 及 N 的双线性性质, 显然 ψ 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的线性泛函. 在 Kunita-Watanabe 不等式 (8.6) 中令 $X = H$, $Y = 1$ 得

$$\begin{aligned}|\psi(N)| &\leq \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} |H||d\mu_{MN}| \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} H^2 d\mu_{M^2}\Big)^{1/2} (\mu_{N^2}(\mathbb{R}_+ \times \Omega))^{1/2} \\ &= \|H\|_{\mathcal{H}_M^2} \cdot \|N\|_{m^2},\end{aligned} \tag{9.3}$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_M^2}$ 表示 $\mathcal{H}_M^2$ 中的范数, 可见 ψ 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理, 存在唯一元素 $X \in \mathfrak{M}_0^2$, 使 $(X,N)_{m^2} = \psi(N)$ 对一切 $N \in \mathfrak{M}_0^2$ 成立, 且

$$\begin{aligned}\|X\|_{m^2} = \|\psi\| &\equiv \sup\{|\psi(N)|; \|N\|_{m^2} = 1,\ N \in \mathfrak{M}_0^2\} \\ &\leq \|H\|_{\mathcal{H}_M^2},\end{aligned} \tag{9.4}$$

证毕. ∎

定义 9.2 对 $M \in \mathfrak{M}_0^2$, $H \in \mathcal{H}_M^2$, 由定理 9.1 所唯一确定的平方可积鞅 X 称为 H 关于 M 的 **随机积分**, 记为

$$X = \int H \cdot dM \qquad (\text{或 } I_M H, \text{ 或 } I^H M) \tag{9.5}$$

或

$$X_t = \int_{[0,t]} H_s \cdot dM_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{9.6}$$

(积分中的 "·" 表示伊藤积分，以区别以后讨论的 Fisk-Stratonovich 积分，参看 §14, 在不致混淆的情形下可以略去).

特别, 随机变量 X_∞ 可记为 $\int_0^\infty H_s dM_s$ (随机定积分); 一般地, 对任一可料集 $A \in \mathcal{P}$, 记

$$\int_A H \cdot dM \equiv \int_0^\infty (\mathbf{1}_A H)_s dM_s. \tag{9.7}$$

当 $A = [[0,t]]$ 时，它就是 (9.6); 当 $A = [[0,\tau]]$(τ 为停时) 时，可以记为 $\int_{[0,\tau]} H_s dM_s$, 然而它是否等于 X_τ? 这是需要证明的 (参看定理 9.4 后面的注).

又：在 (9.7) 中，不必 $H \in \mathcal{H}_M^2$, 只要 $\mathbf{1}_A H \in \mathcal{H}_M^2$ 这个积分就有意义. 从 (9.2) 式可知，由于 μ_{MN} 在 $[[0]]$ 上无负荷，故在 $[[0,\tau]]$ 及 $((0,\tau]]$ 上的积分相等.

由 (9.5) 定义了两类随机积分算子：作为 $H \longmapsto \int H \cdot dM$ 的算子 I_M 和作为 $M \longmapsto \int H \cdot dM$ 的算子 I^H. 我们来分别研究它们的性质.

定理 9.3 对一切 $M \in \mathfrak{M}_0^2$, 随机积分算子：

$$I_M : \mathcal{H}_M^2 \longrightarrow \mathfrak{M}_0^2$$

是由 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_M^2$ 到 $\mathfrak{M}_0^2$ 的一个闭子空间 (记为 $\mathrm{Rg}(I_M)$) 的同构映象. 若 $X \in \mathrm{Rg}(I_M)$, 则

$$I_M^{-1} X = \frac{d\mu_{XM}}{d\mu_{M^2}} \qquad \text{a.e.}[\mu_{M^2}], \tag{9.8}$$

即 μ_{XM} 关于 μ_{M^2} 的 Radon-Nikodym 导数.

证 注意由 (8.10) 式，对 $M,N\in\mathfrak{M}_0^2$ 及 $A,A'\in\mathcal{P}$ 有

$$\begin{aligned}\mu_{M\Pi(A)N}(A')&=(\Pi(A')M,\Pi(A)N)_{m^2}\\&=(\Pi(A)\Pi(A')M,N)_{m^2}\\&=(\Pi(A\cap A')M,N)_{m^2}\\&=\mu_{MN}(A\cap A').\end{aligned}\tag{9.9}$$

设 $H\in\mathcal{H}_M^2$, $X=I_MH$. 在 (9.2) 中以 $\Pi(A)M$ 代 N, 得

$$\begin{aligned}\mu_{XM}(A)=(X,\Pi(A)M)_{m^2}&=\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega}Hd\mu_{M\Pi(A)M}\\&=\int_A Hd\mu_{M^2}.\end{aligned}\tag{9.10}$$

既然上式对一切 $A\in\mathcal{P}$ 成立，故

$$H=\frac{d\mu_{XM}}{d\mu_{M^2}}\qquad\text{a.e. }[\mu_{M^2}].\tag{9.11}$$

若 $G\in\mathcal{H}_M^2$, $Y=I_MG$. 再由 (9.2) 式得

$$\begin{aligned}(I_MH,I_MG)_{m^2}=(X,I_MG)_{m^2}&=\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega}Gd\mu_{XM}\\=\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega}HGd\mu_{M^2}&=(H,G)_{\mathcal{H}_M^2},\end{aligned}\tag{9.12}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_M^2}$ 表示 $\mathcal{H}_M^2$ 中的内积. 于是算子 $I_M:\mathcal{H}_M^2\longrightarrow\mathfrak{M}_0^2$ 是保持内积不变的线性算子，因而是 $\mathcal{H}_M^2$ 到 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的 Hilbert 空间同构映象，在 $\mathrm{Rg}(I_M)$ 上逆算子 I_M^{-1} 存在，且由 (9.11) 给出，此即 (9.8). ∎

下一定理表明，随机积分算子 I_M 和投影算子是可交换的：

定理 9.4 设 $M\in\mathfrak{M}_0^2$, $H\in\mathcal{H}_M^2$. 则对 $\forall A\in\mathcal{P}$ 有

$$I_M(1_AH)=\Pi(A)(I_MH).\tag{9.13}$$

证 在 (9.2) 式中以 $\mathbf{1}_A H$ 代 H, 得

$$(I_M(\mathbf{1}_A H), N)_{m^2} = \int_A H d\mu_{MN}, \qquad \forall N \in \mathfrak{M}_0^2.$$

另一方面，在 (9.2) 式中以 $\Pi(A)N$ 代 N, 并注意到 (9.9) 式，得

$$\begin{aligned}(\Pi(A)(I_M H), N)_{m^2} &= (I_M H, \Pi(A)N)_{m^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} H d\mu_{M\Pi(A)N} = \int_A H d\mu_{MN}, \qquad \forall N \in \mathfrak{M}_0^2.\end{aligned}$$

比较上述两式即得 (9.13). ∎

注 在定理条件下，有

$$\int_A H \cdot dM = \int_0^\infty (\mathbf{1}_A H)_s dM_s = [\Pi(A)(I_M H)]_\infty. \tag{9.14}$$

若 τ 为停时， $A = [[0,\tau]]$, 则

$$\int_{[0,\tau]} H_s dM_s = (I_M H)_\tau, \tag{9.15}$$

说明 $\mathbf{1}_{[[0,\tau]]}H$, 关于 M 的积分和积分所得过程 $X = I_M H$ 在时刻 τ 的值 (τ 截口) 是一致的.

推论 1 设 $M \in \mathfrak{M}_0^2$, $H \in \mathcal{H}_M^2$, 则

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^\infty H_s dM_s\Big)^2\Big] = \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} H^2 d\mu_{M^2}, \tag{9.16}$$

一般地，只须 $A \in \mathcal{P}$, $\mathbf{1}_A H \in \mathcal{H}_M^2$, 就有

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_A H \cdot dM\Big)^2\Big] = \int_A H^2 d\mu_{M^2}. \tag{9.17}$$

特别，若 $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{1}_{[0,t]}H \in \mathcal{H}_M^2$, 则

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{[0,t]} H_s dM_s\Big)^2\Big] = \int_{[[0,t]]} H^2 d\mu_{M^2}. \tag{9.18}$$

由 (9.17) 式可见，若 $A\in\mathcal{P}$，$\mathbf{1}_A H^{(n)}$ 及 $\mathbf{1}_A H\in\mathcal{H}_M^2$，且

$$\int_A (H^{(n)}-H)^2 d\mu_{M^2}\longrightarrow 0,$$

则

$$\int_A H^{(n)}\cdot dM \xrightarrow{L^2} \int_A H\cdot dM.$$

证 在 (9.12) 式中令 $G=H$，得

$$\|I_M H\|_{m^2}^2=\|H\|_{\mathcal{H}_M^2}^2, \tag{9.19}$$

由 $\mathfrak{M}_0^2$ 和 $L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ 的同构关系 (8.1) 即得 (9.16); 对 $A\in\mathcal{P}$，以 $\mathbf{1}_A H$ 代 H，由 (9.16) 即得 (9.17). 其余都是显然的推论. ∎

推论 2 设 $M,N\in\mathfrak{M}_0^2$，$H\in\mathcal{H}_M^2$，$G\in\mathcal{H}_N^2$，$X=I_M H$，$Y=I_N G$，则对 $\forall A\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu_{XY}(A)=\int_A HGd\mu_{MN}. \tag{9.20}$$

证 在 (9.12) 中先以 $I_N G$ 代 $I_M G$，再以 $\mathbf{1}_A H$ 代 H，由 (9.13) 及 (8.10) 即得. ∎

习题 2.2 证明若 $M\in\mathfrak{M}_0^2$，$H\in\mathcal{H}_M^2$，$X=I_M H$，则 $\mu_{X^2}\ll\mu_{M^2}$，且

$$H^2=\frac{d\mu_{X^2}}{d\mu_{M^2}}\qquad \text{a.e.}[\mu_{M^2}]. \tag{9.21}$$

习题 2.3 证明若 $M\in\mathfrak{M}_0^2$，则 $\mathrm{Rg}(I_M)$ 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 之稳定子空间.

下面是平方可积鞅的随机积分表现定理:

定理 9.5 设 $M\in\mathfrak{M}_0^2$. 则对一切 $X\in\mathfrak{M}_0^2$，存在唯一可料过程 $H\in\mathcal{H}_M^2$ 及唯一的 $N\in\mathfrak{M}_0^2$ 满足:

1° $M\perp\!\!\!\perp N$;

2° $X=\int H\cdot dM+N.$ (9.22)

证 由于 $\mathrm{Rg}(I_M)$ 在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中闭，对 $\mathfrak{M}_0^2$ 作正交分解：

$$\mathfrak{M}_0^2 = \mathrm{Rg}(I_M) \oplus \mathrm{Rg}(I_M)^{\perp},$$

于是存在 $H \in \mathcal{H}_M^2$ 及 $N \in \mathrm{Rg}(I_M)^{\perp}$, 使 (9.22) 成立. 由于 $\mathrm{Rg}(I_M)$ 为稳定子空间 (习题 2.3), 由命题 8.8, $N \perp\!\!\!\perp \mathrm{Rg}(I_M)$, 显然 $M \in \mathrm{Rg}(I_M)$, 故 $M \perp\!\!\!\perp N$. 分解的唯一性可由正交分解的唯一性及 $\mathrm{Rg}\,(I_M)$ 和 $\mathcal{H}_M^2$ 的同构关系而得到. ∎

对于 $\mathfrak{M}_0^2$ 之任一稳定子空间，随机积分算子有以下不变性质：

定理 9.6 若 Q 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 之稳定子空间，则对 $M \in Q$ 及 $H \in \mathcal{H}_M^2$, 有 $I_M H \in Q$.

证 当 $H = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{P}$ 时， $I_M H = \Pi(A)M$. 按稳定子空间定义结论显然成立. 由积分关于 H 的线性性质可推广到简单可料过程 (即可料集示性函数的线性组合) 的情形. 再由 I_M 的等距性质、简单过程在 $\mathcal{H}_M^2$ 中的稠密性及 Q 的闭性可推广到一般的可料过程 $H \in \mathcal{H}_M^2$. ∎

应用此定理于稳定子空间 $\mathfrak{M}_c^2$, 得到以下重要推论：

推论 $M \in \mathfrak{M}_c^2$, $H \in \mathcal{H}_M^2 \Longrightarrow I_M H \in \mathfrak{M}_c^2$.

现在考虑随机积分算子 I^H. 当 H 为有界可料过程时，因为 $H \in \mathcal{H}_M^2$ 对一切 $M \in \mathfrak{M}_0^2$ 都成立，所以 I^H 在整个空间 $\mathfrak{M}_0^2$ 都有定义. 注意到 (9.2) 式可写为

$$(I^H M, N)_{m^2} = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} H d(\Pi(\cdot)M, N)_{m^2}, \qquad \forall N \in \mathfrak{M}_0^2,$$

因此 I^H 即 H 关于谱测度 Π 的 **谱积分** (参看 Dunford-Schwartz[1]): $I^H = \int H d\Pi$. 由此可见， I^H 是 $\mathfrak{M}_0^2$ 上的有界自共轭算子. 对一般的可料过程 H, 我们有以下结果：

定理 9.7 设 H 为任一可料过程，令

$$H^{(n)} \equiv H\mathbf{1}_{[|H| \le n]}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{9.23}$$

则 $H^{(n)}$ 为有界可料过程. 再令

$$\mathrm{Dom}(I^H) \equiv \left\{ M \in \mathfrak{M}_0^2;\ \lim_{n\to\infty} I^{H^{(n)}} M \text{ 在 } \mathfrak{M}_0^2 \text{ 中存在} \right\}, \tag{9.24}$$

则

$$M \in \mathrm{Dom}(I^H) \Longleftrightarrow H \in \mathcal{H}_M^2. \tag{9.25}$$

此时

$$I^H M = I_M H = \lim_{n\to\infty} I^{H^{(n)}} M \qquad (\mathfrak{M}_0^2 \text{ 中收敛 }), \tag{9.26}$$

且 I^H 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 中稠密定义的、闭的自共轭算子.

证 先设 $H \in \mathcal{H}_M^2$, 则当 $n \longrightarrow \infty$ 时

$$\|H^{(n)} - H\|_{\mathcal{H}_M^2}^2 = \int_{[|H|>n]} H^2 d\mu_{M^2} \longrightarrow 0.$$

由 I_M 的等距性质可知 $\{I^{H^{(n)}}M\}$ 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 中的 Cauchy 序列，因而在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中收敛，即 $M \in \mathrm{Dom}\ (I^H)$. 反之，若 $M \in \mathrm{Dom}\ (I^H)$, 由同构关系， $\{H^{(n)}\}$ 在 $\mathcal{H}_M^2$ 中收敛，故其极限 $H \in \mathcal{H}_M^2$. 得证 (9.25) 及 (9.26).

为证 Dom (I^H) 在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中稠密，记 $A_n \equiv [|H| \le n], \mathfrak{M}_{A_n}^2$ 为 $\Pi(A_n)$ 所对应的闭子空间. 因 $\mathfrak{M}_{A_n}^2$ 稳定，由定理 9.6, 对 $M \in \mathfrak{M}_{A_n}^2$ 及 $m \ge n$ 有

$$I^{H^{(m)}} M = I_M H^{(m)} \in \mathfrak{M}_{A_n}^2,$$

故由定理 9.4

$$\begin{aligned} I_M H^{(m)} &= \Pi(A_n)(I_M H^{(m)}) = I_M(\mathbf{1}_{A_n} H^{(m)}) \\ &= I_M H^{(n)}. \end{aligned}$$

当 $m \longrightarrow \infty$ 时，极限 (9.26) 必存在，即 $M \in \mathrm{Dom}\ (I^H)$, 于是我们有 $\bigcup_n \mathfrak{M}_{A_n}^2 \subset \mathrm{Dom}\ (I^H)$. 由于 $A_n \uparrow (\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, 对一切 $M \in \mathfrak{M}_0^2$ 有 $\lim_{n\to\infty} \Pi(A_n)M = M($ 在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中收敛), 而 $\Pi(A_n)M \in \mathfrak{M}_{A_n}^2 \subset \mathrm{Dom}\ (I^H)$, 故 Dom (I^H) 在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中稠密.

次证 I^H 为闭算子. 设 $M^{(m)} \in$Dom (I^H) 且 $\lim_{m\to\infty} M^{(m)} = M, \lim_{m\to\infty} I^H M^{(m)} = N$, 要证： $M \in$Dom (I^H), 且 $N = I^H M$. 因

为

$$N=\lim_{m\to\infty} I^H M^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} I^{H^{(n)}} M^{(m)}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \Pi(A_n)(I^H M^{(m)}),$$

由于 $\|\Pi(A_n)\|$ 一致有界，当 $m\longrightarrow\infty$ 时 $\Pi(A_n)(I^H M^{(m)})$ 关于 n 一致地收敛于 $\Pi(A_n)N$, 因而上式中极限过程可以交换，即

$$N=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} I^{H^{(n)}} M^{(m)}.$$

因为 $I^{H^{(n)}}$ 为有界算子，故上式又等于

$$N=\lim_{n\to\infty} I^{H^{(n)}} M,$$

亦即 $M\in \mathrm{Dom}\,(I^H)$ 且 $N=I^H M$.

利用 $I^{H^{(n)}}$ 的自共轭性和内积的连续性质不难证明 I^H 的自共轭性. ∎

习题 2.4 设 H,G 为可料过程， A 为可料集. 证明：

1° $\Pi(A)I^H\subseteq I^H\Pi(A)$; (9.27)

2° $I^H I^G\subseteq I^{HG}$. (9.28)

习题 2.5 设 $s<t$ 及 $F\in\mathcal{F}_s, M\in\mathfrak{M}_0^2$ 及 $H\in\mathcal{H}_M^2$. 证明：

$$\int_{(s,t]} 1_F H_u dM_u = 1_F\int_{(s,t]} H_u dM_u; \tag{9.29}$$

进一步证明，对任一有界 $\mathcal{F}_s$ 可测随机变量 ξ 有

$$\int_{(s,t]} \xi H_u dM_u = \xi\int_{(s,t]} H_u dM_u. \tag{9.30}$$

(提示：利用定理 9.4, 设 $A=(s,t]\times F$, 然后利用积分算子 I_M 的线性性质和连续性质.)

§10. 局部 L^2 鞅随机积分

平方可积鞅随机积分的定义很自然地可以推广到 L^2 鞅. 因为若 $M=\{M_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为右连续 L^2 鞅, 那么对任意 $T>0$, 其停止过程 $M^T\equiv\{M_{T\wedge t},t\in\mathbb{R}_+\}$ 就是右连续平方可积鞅. 更进一步, 我们可以用停时 τ 来代替固定时刻 T, 因此引进以下定义:

定义 10.1 设 $p\in[1,\infty)$, $M=\{M_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 $\mathfrak{F}$ 适应过程. 若存在 $\mathfrak{F}$ 停时序列 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s. 使对每一 $n\in\mathbb{N}$, 停止过程 $M^{\tau_n}\equiv\{M_{\tau_n\wedge t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 L^p 鞅, 则 M 称为**局部 L^p 鞅**, $\{\tau_n\}$ 称为 M 的一个**局部化停时列**. 局部 L^1 鞅简称为**局部鞅**.

注 局部 L^p 鞅也是局部 L^p 有界鞅. 局部鞅也是局部一致可积鞅. 因为若 $\{\tau_n\}$ 为其局部化停时列, 总可选 $\{\tau_n\wedge n\}$ 为新的局部化停时列, 而 $M^{\tau_n\wedge n}$ 为 L^p 有界 (一致可积) 鞅.

显然, L^p 鞅都是局部 L^p 鞅, 但局部 L^p 鞅却未必是鞅.

命题 10.2 设 $p\in[1,\infty)$, $M=\{M_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为右连续局部 L^p 鞅. 则 M 为 L^p 鞅的充分必要条件是: 存在一个局部化停时列 (因而也是对一切局部化停时列) $\{\tau_n\}$, 使对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\{|M_{\tau_n\wedge t}|^p,\ n\in\mathbb{N}\}$ 为一致可积族.

证 由假定, $\forall n\in\mathbb{N},M^{\tau_n}=\{M_{\tau_n\wedge t},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 L^p 鞅, 且 $\lim_{n\to\infty}M_{\tau_n\wedge t}=M_t$ a.s., 若 $\{|M_{\tau_n\wedge t}|^p,\ n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积, 由定理 4.7 有 $\lim_{n\to\infty}M_{\tau_n\wedge t}=M_t\ (L^p)$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 成立. 由条件期望算子在 L^p 中的连续性 (习题 1.6), 在下面等式中令 $n\longrightarrow\infty$:

$$M_{\tau_n\wedge s}=\mathbb{E}[M_{\tau_n\wedge t}|\mathcal{F}_s]\qquad \text{a.s. } (s<t),$$

便得到 $M_s=\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s]$ a.s., 故 M 为 L^p 鞅.

反之, 若 M 为右连续 L^p 鞅, 则 $|M|^p$ 为非负右连续下鞅, 因而对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 由定理 6.9 得 $0\le|M_{\tau_n\wedge t}|^p\le\mathbb{E}[|M_t|^p|\mathcal{F}_{\tau_n\wedge t}]$ a.s.. 显然, $\{|M_{\tau_n\wedge t}|^p,\ n\in\mathbb{N}\}$ 一致可积. ∎

推论 局部鞅为鞅之充要条件是：它是 (LD) 类过程.

特别，若对一切 $T>0$, 停止过程 M^T 为 L^p 鞅，则 M 本身也是 L^p 鞅 (只要在命题 10.2 中取 $\tau_n=n$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\{|M_{n\wedge t}|^p,\ n\in\mathbb{N}\}$ 为有限族，当然一致可积).

命题 10.3 设 $M=\{M_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为连续局部鞅，则对 $\forall p\in[1,\infty]$, M 为局部 L^p 鞅，具有如下局部化停时列 $\{\sigma_k\}$:

$$\sigma_k\equiv\inf\{t\in\mathbb{R}_+;\ |M_t|\geq k\},\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{10.1}$$

证 设 $\{\tau_n\}$ 为 M 的一个局部化停时列. 则对任意固定的 k, $\{\tau_n\}$ 也是 M^{σ_k} 的局部化停时列 (因为对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $(M^{\sigma_k})^{\tau_n}=M^{\sigma_k\wedge\tau_n}=(M^{\tau_n})^{\sigma_k}$ 为连续鞅), 但

$$\sup_n\left|M^{\sigma_k}_{\tau_n\wedge t}\right|\leq k,\qquad \forall t\in\mathbb{R}_+,$$

故 $\left\{M^{\sigma_k}_{\tau_n\wedge t},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ 一致可积，由命题 10.2 可知 M^{σ_k} 为连续 (有界) 鞅，显然 $\sigma_k\uparrow\infty$ a.s. ∎

注意，若 M 仅仅是右连续局部鞅，由 (10.1) 定义的 σ_k 虽然也是停时，但我们一般得不出 $M_{\sigma_k}=k$, 因而 M^{σ_k} 未必有界.

我们以 $\mathfrak{M}^p_{loc}$ 表示初值为 0 的局部 L^p 鞅全体， $\mathfrak{M}_{loc}=\mathfrak{M}^1_{loc}$ 表示局部鞅全体， $\mathfrak{M}^c_{loc}$表示初值为 0 的连续局部鞅全体.

下面讨论可料过程关于局部 L^2 鞅的随机积分. 它包括 L^2 鞅 (因而也包括 Brown 运动) 为其特殊情形.

命题 10.4 设 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, 则在 $\mathcal{P}$ 上确定一个 σ- 有限测度 μ_{M^2}, 使对 M 的任一局部化停时列 $\{\tau_n\}$, 有

$$\mu_{M^2}(A\cap[[0,\tau_n]])=\mu_n(A)$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad A\in\mathcal{P}, \tag{10.2}$$

其中 μ_n 为 $(M^{\tau_n})^2$ 生成之 Doléans 测度.

证 任选一个局部化停时列 $\{\tau_n\}$, 按 (10.2) 定义 μ_{M^2}, 我们要证明此定义是相容的.

设 $\sigma \leq \tau$ 为两个停时，若 $((\sigma,\tau]] \subset ((\tau_n,\infty))$，则

$$\begin{aligned}\mu_n(((\sigma,\tau]]) &= \mathbb{E}[M^2_{\tau_n\wedge\tau} - M^2_{\tau_n\wedge\sigma}] \\ &= \mathbb{E}[M^2_{\tau_n} - M^2_{\tau_n}] = 0,\end{aligned}$$

因而 μ_n 在 $\mathcal{P}\bigcap((\tau_n,\infty))$ 上恒为零；若 $((\sigma,\tau]] \subset [[0,\tau_n]]$ 且 $m>n$，则 $\tau_m\wedge\tau = \tau = \tau_n\wedge\tau$，$\tau_m\wedge\sigma = \tau_n\wedge\sigma$，

$$\mu_m(((\sigma,\tau]]) = \mathbb{E}[M^2_\tau - M^2_\sigma] = \mu_n(((\sigma,\tau]]),$$

因而 μ_n 和 μ_m 在 $\mathcal{P}\bigcap[[0,\tau_n]]$ 上重合．又因除开一个不足道集之外，有 $\mathbb{R}_+\times\Omega = \bigcup_n[[0,\tau_n]]$，故由 (10.2) 确定 $\mathcal{P}$ 上一个 σ- 有限测度．不难证明此定义不依赖于停时列 $\{\tau_n\}$ 的选择 (留作习题). ∎

习题 2.6 证明由 (10.2) 定义的 σ- 有限测度 μ_{M^2} 不依赖于局部化停时列 $\{\tau_n\}$ 的选择.

定义 10.5 设 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$，以 $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ 表示满足以下条件的可料过程 H 全体：存在停时列 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s. 使

1° $\{\tau_n\}$ 为 M 之局部化停时列；

2° 对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$H\in\mathcal{H}^2_n \equiv L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_n)$．其中 μ_n 为 $(M^{\tau_n})^2$ 生成之 Doléans 测度．此序列称为关于 M 和 H 之局部化停时列.

注 由于 μ_n 在 $\mathcal{P}\bigcap((\tau_n,\infty))$ 上恒为零，按 (10.2) 式，条件 2° 等价于条件：对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\mathbf{1}_{[[0,\tau_n]]}H\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_{M^2})$，其中 μ_{M^2} 为由命题 10.4 确定的 σ- 有限测度.

定理 10.6 设 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$，$H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$，则存在唯一元素 $X\in\mathfrak{M}^2_{loc}$，使对一切关于 M 及 H 之局部化停时列 $\{\tau_n\}$ 有

$$X^{\tau_n} = \int H\cdot dM^{\tau_n}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{10.3}$$

证 因 $M^{\tau_n}\in\mathfrak{M}^2_0$ 及 $H\in\mathcal{H}^2_n$，故 (10.3) 右边有意义且为 $\mathfrak{M}^2_0$ 中元素，记其为 $Y^{(n)}$，并记 $A_n\equiv[[0,\tau_n]]$．由 (9.27) 可知，当 $m>n$ 时有

$$\Pi(A_n)Y^{(m)} = \int H\cdot dM^{\tau_m\wedge\tau_n} = \int H\cdot dM^{\tau_n} = Y^{(n)}$$

此即 $(Y^{(m)})^{\tau_n}=Y^{(n)}$, 可见在 A_n 上 $Y^{(m)}$ 与 $Y^{(n)}$ 无区别. 按归纳极限定义 X, 使 $X^{\tau_n}=Y^{(n)}$ (由此可知对 $\forall t\in \mathbb{R}_+$ 有 $\lim_{n\to\infty} Y_t^{(n)}=X_t$ *a.s.*). 显然, $X\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, 且 $\{\tau_n\}$ 为其局部化停时列.

剩下还要证明 X 之定义不依赖于局部化停时列的选择. 设有另一个局部化停时列 $\{\sigma_n\}$, 由 $\widetilde{Y}^{(n)}\equiv\int H\cdot dM^{\sigma_n}$ 定义另一归纳极限 $\widetilde{X}$. 因为对 $\forall n\in \mathbb{N}$ 有

$$M^{\tau_n\vee\sigma_n}=M^{\tau_n}+M^{\sigma_n}-M^{\tau_n\wedge\sigma_n}\in\mathfrak{M}^2_0$$

及

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{[[0,\tau_n\vee\sigma_n]]}H=&\mathbf{1}_{[[0,\tau_n]]}H+\mathbf{1}_{[[0,\sigma_n]]}H\\&-\mathbf{1}_{[[0,\tau_n\wedge\sigma_n]]}H\in L^2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{P},\mu_{M^2}),\end{aligned}$$

故 $\{\tau_n\vee\sigma_n\}$ 仍为关于 M 和 H 之局部化停时列. 设由 $\widehat{Y}^{(n)}\equiv\int H\cdot dM^{\tau_n\vee\sigma_n}$ 归纳定义 $\widehat{X}$, 则从以上讨论可知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $Y^{(n)}$ 与 $\widehat{Y}^{(n)}$ 在 $[[0,\tau_n]]$ 上无区别, $\widetilde{Y}^{(n)}$ 与 $\widehat{Y}^{(n)}$ 在 $[[0,\sigma_n]]$ 上无区别, 因而 $\widetilde{Y}^{(n)}$ 与 $Y^{(n)}$ 在 $[[0,\sigma_n\wedge\tau_n]]$ 上无区别. 但除开一个不足道集外, $\mathbb{R}_+\times\Omega=\bigcup_n[[0,\sigma_n\wedge\tau_n]]$, 故 $\widetilde{X}$ 与 X 无区别. ∎

定义 10.7 设 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, $H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, 则由定理 10.6 所确定的唯一元素 $X\in\mathfrak{M}^2_{loc}$ 称为 H 关于 M 的**随机积分**, 仍记为: $X=\int H\cdot dM$.

现假定 $M,N\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, $\{\tau_n\}$ 同时是关于 M 和 N 的局部化停时列, 类似于 (10.2) 可在 $\mathcal{P}$ 上确定一个 σ- 有限符号测度:

$$\mu_{MN}(A\cap[[0,\tau_n]])\equiv\lambda_n(A),\ \forall n\in\mathbb{N},\ A\in\mathcal{P},\qquad(10.4)$$

其中 λ_n 为 $(MN)^{\tau_n}$ 生成之 Doléans(符号) 测度. 若 $\mu_{MN}\equiv 0$ (或等价地, MN 为局部鞅), 称 M 与 N**强正交**, 仍记为 $M\perp\!\!\!\perp N$. 关于平方可积鞅积分的许多性质不难推广到局部 L^2 鞅的情形. 下面的定理罗列了一些主要性质:

定理 10.8 设 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, $H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, $X=\int H\cdot dM$, 则

1° $H\longmapsto\int H\cdot dM$ 及 $M\longmapsto\int H\cdot dM$ 为线性映象;

2° 若 $G \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$, $Y = \int G \cdot dM$, 则

$$HG = \frac{d\mu_{XY}}{d\mu_{M^2}} \qquad \text{a.e.} \qquad [\mu_{M^2}]; \tag{10.5}$$

特别在 (10.5) 中分别令 $G = H$ 及 $G = 1$, 得

$$H^2 = \frac{d\mu_{X^2}}{d\mu_{M^2}},\ H = \frac{d\mu_{XM}}{d\mu_{M^2}} \qquad \text{a.e.} \qquad [\mu_{M^2}]; \tag{10.6}$$

3° 若 $G \in \mathcal{L}^2_{loc}(X)$, 则 $HG \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ 且

$$\int (HG) \cdot dM = \int G \cdot dX; \tag{10.7}$$

特别取 $G = \mathbf{1}_{[[0,\tau]]}$, τ 为有界停时, 则

$$\int H\mathbf{1}_{[[0,\tau]]} \cdot dM = X^\tau; \tag{10.8}$$

4° 对 $s < t$ 及有界 $\mathcal{F}_s$ 可测随机变量 ξ 有

$$\int_{(s,t]} \xi H_u dM_u = \xi \int_{(s,t]} H_u dM_u \qquad \text{a.s.}; \tag{10.9}$$

5° 若可料过程序列 $\{H^{(n)}\}$ 满足: $|H^{(n)}| \leq G \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$, 且 $\lim_{n\to\infty} H^{(n)} = H$ a.e. $[\mu_{M^2}]$, 则对 $\forall T > 0$ 有

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_{[0,t]} (H^{(n)}_s - H_s) \cdot dM_s \right| \xrightarrow{P} 0. \tag{10.10}$$

证 1° 显然成立; 2°, 3°, 4° 分别是 (9.20), (9.28), (9.30) 的推论, 现证 (10.10).

设 $\{\tau_k\}$ 为关于 M 和 G 的局部化停时列. 由 Lebesgue 控制收敛定理, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\{H^{(n)}\}$ 在 $\mathcal{H}^2_k = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_k)$ 中收敛于

H, 其中 μ_k 为 $(M^{\tau_k})^2$ 生成之 Doléans 测度. 根据等距性质 (9.18), 对 $\forall t\in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_{[0,t]} H_s^{(n)} dM_s^{\tau_k} \xrightarrow{L^2} \int_{[0,t]} H_s dM_s^{\tau_k},$$

依定义 (10.3) 此即

$$\int_{[0,t\wedge\tau_k]} H_s^{(n)} dM_s \xrightarrow{L^2} \int_{[0,t\wedge\tau_k]} H_s dM_s. \qquad (10.11)$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由 L^2 鞅的极大值不等式 (6.10) 有

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_{[0,t]}(H_s^{(n)}-H_s)dM_s\Big|\ge\varepsilon\Big\}\\
&\le P\{\tau_k<T\}+P\Big\{\sup_{0\le t\le T}\Big|\mathbf{1}_{[\tau_k\ge T]}\int_{[0,t]}(H_s^{(n)}-H_s)dM_s\Big|\ge\varepsilon\Big\}\\
&\le P\{\tau_k<T\}+\varepsilon^{-2}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{[0,T]}(H_s^{(n)}-H_s)dM_s^{\tau_k}\Big)^2\Big],
\end{aligned}$$

由于 $\tau_k\uparrow\infty$ a.s., 选 k 足够大可使右边第一项任意小; 再由 (10.11), 可选 n 足够大以使第二项任意小, 得证 (10.10). ∎

习题 2.7 证明若 $M\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, 则对一切 $X\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, 存在唯一可料过程 $H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ 及唯一 $N\in\mathfrak{M}^2_{loc}$, 满足: $M\perp\!\!\!\perp N$ 及

$$X=\int H\cdot dM+N.$$

下面讨论一些常见的特殊情形. 在某些特殊情形下, 被积过程类可以扩大.

定理 10.9 1° 若 $M\in\mathfrak{M}^c_{loc}$, $H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, 则

$$X=\int H\cdot dM\in\mathfrak{M}^c_{loc};$$

2° 若 M 为右连续 (连续)L^2 鞅， H 为可料过程，满足条件：对 $\forall t>0$

$$\mathbf{1}_{[0,t]}H \in \mathcal{H}_M^2 \equiv L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_{M^2}), \tag{10.12}$$

则 $X=\int H\cdot dM$ 为右连续 (连续)L^2 鞅.

证 因为连续局部鞅属于一切 $\mathfrak{M}_{loc}^p$(命题 10.3), 故积分有意义，从定理 10.6 的证明即可看出 X 是连续局部 L^2 鞅，亦即连续局部鞅.

若 M 为 L^2 鞅， H 满足条件 (10.12), 则序列 $\{n\}$ 是关于 M 和 H 之局部化停时列. 按定理 10.6 的证明，它也是 X 的局部化停时列，由命题 10.2 可知 X 本身就是 L^2 鞅. 证毕. ∎

现设 M 为右连续 L^2 鞅, 且 μ_{M^2} 在 $\mathcal{P}$ 上关于 $\lambda\times P$ 绝对连续：$\mu_{M^2}\ll\lambda\times P$, 其中 λ 为 $\mathbb{R}_+$ 上之 Lebesgue 测度. 由 Radon-Nikodym 定理，存在 $\mathcal{P}$ 可测函数 (可料过程)$G\geq 0$, 对 $\forall A\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu_{M^2}(A)=\int_A G(t,\omega)d(\lambda\times P). \tag{10.13}$$

注意等式右边对 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 都有意义，这样得到了 μ_{M^2} 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 上的开拓 $\widetilde{\mu}_{M^2}$. 以 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 中 $\widetilde{\mu}_{M^2}$ 零集全体，并记 $\widetilde{\mathcal{P}}_M\equiv\sigma(\mathcal{P}\bigcup\mathcal{N})$, 称为 $\mathcal{P}$ 关于$(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F},\widetilde{\mu}_{M^2})$ 的增广. 我们有以下重要结果：

命题 10.10 设 M 为右连续 L^2 鞅，满足条件： $\mu_{M^2}\ll\lambda\times P$, 则循序 σ- 代数 $\mathcal{M}\subset\widetilde{\mathcal{P}}_M$.

证 设 H 为有界循序过程，令

$$H^a(t,\omega)\equiv\frac{1}{a}\int_{t-a}^t H(s,\omega)ds, \qquad a>0, \tag{10.14}$$

则 H^a 为连续适应过程因而是可料过程，且

$$\lim_{a\downarrow 0}H^a(t,\omega)=H(t,\omega), \qquad \forall\omega\in\Omega,\ \text{a.e. } t\in\mathbb{R}_+.$$

对 $\forall c>0, \forall t>0$, 由 Fubini 定理有

$$\lim_{a\downarrow 0}\int_{[|G|\le c]\cap[[0,t]]}|H^a-H|d\widetilde{\mu}_{M^2}$$
$$=\lim_{a\downarrow 0}\int_{[|G|\le c]\cap[[0,t]]}|H^a-H|Gd(\lambda\times P)=0,$$

因而 H 在集合 $[|G|\le c]$ 上为可料过程序列的 a.e. $[\widetilde{\mu}_{M^2}]$ 极限，因除开一不足道集外，$\mathbb{R}_+\times\Omega=\bigcup_n[|G|\le n]$, 故 H 为 $\widetilde{\mathcal{P}}_M$ 可测. ∎

注 可以用投影定理证明 (参看 Dellacherie-Meyer[2]), 若 H 为有界可测过程，则存在可选过程 $\widetilde{H}$, 使对 $\forall t\in\mathbb{R}^+$ 有 $\widetilde{H}_t=\mathbb{E}[H_t|\mathcal{F}_t]$ a.s., 若 H 为适应过程且 $\mathfrak{F}$ 满足通常条件，则有 $\widetilde{H}_t=H_t$ a.s., 由 Fubini 定理有 $(\lambda\times P)(\widetilde{H}\neq H)=0$. 在命题 10.10 的证明中可以用 $\widetilde{H}$ 来取代 H, 因而进一步证明了**一切可测适应过程为 $\widetilde{\mathcal{P}}_M$ 可测**. 详细讨论可参看 Chung-Williams[1].

我们知道，对 Brown 运动 W 有 $\mu_{W^2}=\lambda\times P$, 利用命题 10.10, 在关于 Brown 运动的随机积分的特殊情形，被积过程可以扩大到可测适应过程类.

定义 10.11 以 $\mathcal{H}^2_{loc}$ 表示满足以下条件之可测适应过程 H 全体:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t H_s^2ds\Big]<\infty,\qquad \forall t\in\mathbb{R}_+; \tag{10.15}$$

$\mathcal{L}^2_{loc}$ 表示满足以下条件之可测适应过程 H 全体:

$$\int_0^t H_s^2ds<\infty\qquad \text{a.s.},\qquad \forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{10.16}$$

定理 10.12 设 W 为 $\mathfrak{F}$-Brown 运动，$H\in\mathcal{L}^2_{loc}$, 则随机积分 $X=\int H\cdot dW\in\mathfrak{M}^c_{loc}$; 若 $H\in\mathcal{H}^2_{loc}$, 则 X 为连续 L^2 鞅.

证 设 $H\in\mathcal{L}^2_{loc}$ 且为可料过程，选取

$$\tau\equiv\inf\Big\{t;\int_0^t H_s^2ds\ge n\Big\}\wedge n,\qquad n\in\mathbb{N},$$

显然 $\{\tau_n\}$ 为一列停时，且 $\tau_n \uparrow \infty$ a.s., 因 $\mu_{W^2} = \lambda \times P$, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty 1_{[[0,\tau_n]]} H_s^2 ds = \int_0^{\tau_n} H_s^2 ds \le n,$$

故 $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(W)$, 且 $\{\tau_n\}$ 为关于 W 和 H 之局部化停时列. 按定理 10.9 之 1°, X 为连续局部鞅.

设 $H \in \mathcal{H}^2_{loc}$ 且为可料过程，此时条件 (10.12) 满足，按定理 10.9 之 2°, X 为连续 L^2 鞅.

对于 H 为可测适应过程的情况，由命题 10.10 之注，H 为 $\widetilde{\mathcal{P}}_W$ 可测. 注意到若 $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \widetilde{\mathcal{P}}_W, \lambda \times P)$, 总存在 $\widetilde{H} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \lambda \times P)$, 使 $\widetilde{H} = H$ a.e.$[\lambda \times P]$. 故作为 Hilbert 空间两者是同一空间，前面的结果均可以用 $\widetilde{\mathcal{P}}_W$ 代替 $\mathcal{P}$, 于是定理结论成立. ∎

注 当 M 为连续局部鞅时，可以将积分 $\int_{[0,t]} H_s dM_s$ 记为 $\int_0^t H_s dM_s$.

§11. 半鞅随机积分

许多随机过程常常具有以下特点：它可表示为一个平均轨道和一个随机偏差之和. 平均轨道常常是规则的，具有有限变差；而随机偏差常常是不规则的，表现为一个鞅. 例如带漂移的 Brown 运动，混有噪声的信号过程，出现干扰的动态系统等等都属于这种情况.

从理论上分析，为使随机积分的定义合理，应当包含按轨道的 Stieltjes 积分作为特殊情形. 为此，我们要研究有限变差过程.

仍然假定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 满足通常条件.

定义 11.1 $\mathfrak{F}$ 适应过程 $U = \{U_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 若满足 $U_0 = 0$, 且所有轨道为非负实值的右连续增函数，则称为适应增过程 (简称 增过程); 若对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $U_t \in L^1$. 则称 U 为 可积(适应)增过程. 若过程 $V = \{V_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 可表为两个增过程之差，则称为 (适应)有限变差过程.

有限变差过程总体记为 $\mathcal{V}$, 增过程总体记为 $\mathcal{V}_+$.

显然, 有限变差过程为右连左极适应过程, 因而也是可选过程, 其所有轨道在任一有限区间具有有界变差. 可积增过程为右连续非负下鞅, 因而是 (LD) 类过程, 而可积有限变差过程是 (LD) 类拟鞅. 下面两个命题是显然的.

命题 11.2 若 $V \in \mathcal{V}, \overline{V}$ 为其全变差过程:

$$\overline{V}_t \equiv \sup_n \sum_{k=1}^{2^n} |V(kt2^{-n}) - V((k-1)t2^{-n})|, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (11.1)$$

则 $\overline{V} \in \mathcal{V}_+$. 令

$$V^+ \equiv \frac{1}{2}(\overline{V} + V),\ V^- \equiv \frac{1}{2}(\overline{V} - V),$$

则 V^+, $V^- \in \mathcal{V}_+$, 且

$$V = V^+ - V^-,\ \overline{V} = V^+ + V^-. \qquad (11.2)$$

命题 11.3 若 U 为 (连续) 增过程, H 为循序过程, 且关于 U 可积 (即对 $\forall \omega \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 存在按轨道的 Lebesgue-Stieltjes 积分 —— 称为 **随机 Stieltjes 积分**):

$$X_t(\omega) \equiv \int_{[0,t]} H_s(\omega) dU_s(\omega), \qquad (11.3)$$

则 X 为 (连续) 有限变差过程.

因为有限变差过程可以表示为两个增过程之差, 故上述结论对 $U \in \mathcal{V}$ 仍成立.

定义 11.4 $\mathfrak{F}$ 适应过程 $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, 如果可作如下分解:

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (11.4)$$

其中 X_0 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量, $M \in \mathfrak{M}^2_{loc}$, $V \in \mathcal{V}$, 则 X 称为 $\mathfrak{F}$ 半鞅.[1]

---

[1] 一般定义半鞅为局部鞅加适应有限变差过程, 这和我们的定义是等价的, 例如参看严加安 [2] 定理 8.20 及定义 8.46.

半鞅的分解式 (11.4) 不是唯一的，但我们有以下结果：

命题 11.5 设 $V\in\mathcal{V}$. 若 V 同时是连续鞅，则 $V\equiv 0$ (不足道过程).

证 由于 V 是连续过程，故只须证对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有 $V_t=0$ a.s., 为此又只须证对一切有界 $\mathcal{F}_t$ 可测随机变量 ξ, 有 $\mathbb{E}[\xi V_t]=0$.

将区间 $[0,t]$ 2^n 等分，令

$$\Delta V_{kn}\equiv V(kt2^{-n})-V((k-1)t2^{-n}),\qquad (k=1,2,\cdots,2^n).$$

因 ΔV_{kn} 为 $\mathcal{F}_{kt2^{-n}}$ 可测，故

$$\mathbb{E}[\xi(\Delta V_{kn})]=\mathbb{E}[(\Delta V_{kn})\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_{kt2^{-n}})].$$

设 M 为鞅 $\{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_s],\ s\in\mathbb{R}_+\}$ 之右连续左极修正 (根据定理 6.3, 这种修正永远存在), 则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi V_t]&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\mathbb{E}[\xi(\Delta V_{kn})]\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{2^n}M_{kt2^{-n}}(\Delta V_{kn})\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[\int_0^t M_s dV_s\Big],\end{aligned}\tag{11.5}$$

后一等式是根据 M 的右连续性及 Lebesgue 控制收敛定理. 但因 V 连续，此 Lebesgue- Stieltjes 和中可将 $M_{kt2^{-n}}$ 改为 $M_{(k-1)t2^{-n}}$; 又因 V 为鞅，故

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[M((k-1)t2^{-n})(\Delta V_{kn})]\\=&\mathbb{E}[M((k-1)t2^{-n})\mathbb{E}((\Delta V_{kn})|\mathcal{F}_{(k-1)t2^{-n}})]=0\\&\qquad\qquad (k=1,2,\cdots,2^n),\end{aligned}$$

于是由 (11.5) 得 $\mathbb{E}[\xi V_t]=0$. ∎

推论 设 $V\in\mathcal{V}\bigcap\mathfrak{M}^c_{loc}$, 则 $V\equiv 0$ (不足道过程).

证 设 $\{\tau_n\}$ 为 V 的局部化停时列，则对 $\forall n \in \mathbb{N}$，停止过程 V^{τ_n} 为连续鞅. 显然 $V^{\tau_n} \in \mathcal{V}$，由命题 11.5，$V^{\tau_n}$ 为不足道过程. 既然除开一个不足道集外，有 $\mathbb{R}_+ \times \Omega = \bigcup_n [[0,\tau_n]]$，故 V 也是不足道过程. ∎

从上述讨论可知，对于连续半鞅，分解式 (11.4) 是唯一的. 因为若存在另一分解：

$$X_t = X_0 + M'_t + V'_t,$$

则 $M - M' = V' - V \in \mathcal{V} \bigcap \mathfrak{M}^c_{loc}$，因而为不足道过程，亦即 M 与 M'，V 与 V' 无区别.

定义 11.6 设 H 为一过程，若存在停时列 $\{\tau_n\}$ 满足：

1° $\tau_n \uparrow \infty$ a.s.;

2° 对 $\forall n \in \mathbb{N}, H\mathbf{1}_{[[0,\tau_n]]}$ 为有界过程;

则 H 称为 **局部有界过程**.

显然，每一连续适应过程都是局部有界的 (只要令 $\tau_n \equiv \inf\{t : |H_t| \geq n\}$).

命题 11.7 设 $M \in \mathfrak{M}^2_{loc} \bigcap \mathcal{V}, H$ 为局部有界可料过程. 则 H 关于 M 的随机积分和随机 Stieltjes 积分一致.

证 考虑停止过程，不妨设 $M \in \mathfrak{M}^2_0 \bigcap \mathcal{V}, H$ 为有界可料过程，对 $A \in \mathcal{I}_b$，$A = ((\sigma, \tau]]$，我们已经有

$$\int \mathbf{1}_A \cdot dM = M^\tau - M^\sigma = \int_{(\sigma,\tau]} dM_s,$$

显然两种积分一致. 由两种积分的线性性质，可见当 H 为示性函数的线性组合时，两种积分也一致. 再由两种积分关于一致有界可料过程单调序列的连续性质，可知当 H 为任意有界可料过程时两种积分仍一致. ∎

定义 11.8 设 X 为半鞅， H 为可料过程. 如果存在 X 的一个分解 (11.4) 使 $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ 且 H 关于 V 的随机 Stieltjes 积分存在，则称 H 关于 X 可积，此分解称为 X 关于 H 的一个 可积分

解. 此时定义：

$$\int H\cdot dX\equiv H_0X_0+\int H\cdot dM+\int HdV, \tag{11.6}$$

称为 H 关于 X 的 **随机积分**. (11.6) 右边第一个积分是局部 L^2 鞅随机积分，第二个积分

$$\left(\int HdV\right)_t=\int_{[0,t]}H_sdV_s, \qquad t\in\mathbb{R}_+ \tag{11.7}$$

是随机 Stieltjes 积分.

自然要提出一个问题：既然分解式 (11.4) 不是唯一的，那么这种定义是否依分解不同而不同？我们有以下结果：

定理 11.9 设 H 为局部有界可料过程，X 为半鞅，(11.4) 为 X 关于 H 的一个可积分解，$\{\tau_n\}$ 为关于 H 及 M 的局部化停时列. 则存在唯一半鞅 Y, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 及 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$Y_t^{\tau_n}=H_0X_0+\int_{[0,\tau_n\wedge t]}H_sdM_s+\int_{[0,\tau_n\wedge t]}H_sdV_s \text{ a.s.}, \tag{11.8}$$

此过程 Y 与 X 的可积分解及局部化停时列的选择无关.

证 记 (11.8) 右端所确定的过程为 $Y^{(n)}$, 显然当 $m>n$ 时有 $(Y^{(m)})^{\tau_n}=Y^{(n)}$, 故可由 $\{Y^{(n)}\}$ 归纳地定义一个半鞅 Y.

设 $X_t=X_0+M_t'+V_t'$ 为另一个可积分解，$\{\tau_n'\}$ 为另一个关于 H 及 M' 的局部化停时列，且和 (11.8) 式同样地确定另一个半鞅 Y'. 令 $\sigma_n=\tau_n\wedge\tau_n'$, 则 $\{\sigma_n\}$ 为同时关于 H,M 及 M' 的局部化停时列. 为证 $Y=Y'$, 只须证对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $Y^{\sigma_n}=(Y')^{\sigma_n}$, 于是问题归结于证明：当 H 有界，$M+V=M'+V'$ 且 M 及 $M'\in\mathfrak{M}_0^2$ 时有

$$\int_{[0,t]}H_sdM_s+\int_{[0,t]}H_sdV_s=\int_{[0,t]}H_sdM_s'+\int_{[0,t]}H_sdV_s', \quad \text{a.s.} \quad \forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{11.9}$$

但此时 $V-V'=M'-M\in\mathfrak{M}_0^2\bigcap\mathcal{V}$, 由命题 11.7

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]}H_sdV_s-\int_{[0,t]}H_sdV'_s&=\int_{[0,t]}H_sd(V-V')_s\\&=\int_{[0,t]}H_sd(M'-M)_s=\int_{[0,t]}H_sdM'_s-\int_{[0,t]}H_sdM_s,\end{aligned}$$

此即 (11.9) 式. ∎

因此, 尽管半鞅 X 关于可料过程 H 的可积分解不是唯一的, 但由 (11.6) 定义的半鞅随机积分却是唯一确定的. 积分所得过程仍然是半鞅. 显然, 若 X 连续, 则 $\int H\cdot dX$ 也是连续半鞅.

关于半鞅随机积分的性质, 不难从局部 L^2 鞅随机积分及随机 Stieltjes 积分的性质推出. 例如我们有以下的控制收敛定理:

定理 11.10 设 X 为半鞅, G 为局部有界可料过程. 若可料过程序列 $\{H^{(n)}\}$ 满足:

1° $|H^{(n)}|\le G,\qquad \forall n\in\mathbb{N}$;

2° $\lim_{n\to\infty}H^{(n)}(s,\omega)=H(s,\omega),\qquad \forall(s,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$,

则随机积分 $\int H^{(n)}\cdot dX$ 依概率在有限区间一致收敛于 $\int H\cdot dX$.

证 设 $X=X_0+M+V$ 为关于 G 的一个可积分解. 由定理 10.8 之 5°, $\int H^{(n)}\cdot dM$ 依概率在有限区间一致收敛于 $\int H\cdot dM$. 而由 Lebesgue 控制收敛定理可证 $\int H^{(n)}\cdot dV$ 以概率 1 在有限区间一致收敛于 $\int H\cdot dV$, 故有定理结论. ∎

下一定理是"含参变量的随机积分"定理:

定理 11.11 设 X 为 (连续) 半鞅, $\widetilde{H}=\{H^a,a\in\mathbb{R}\}$ 为一族有界可料过程, 使映象:

$$(\omega,t,a)\longmapsto H_t^a(\omega)\text{ 为 }\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{ 可测.}$$

则存在一族可选 (可料) 过程 $\widetilde{Y}=\{Y^a,a\in\mathbb{R}\}$, 使映象: $(\omega,t,a)\longmapsto Y_t^a(\omega)$ 为 $\mathcal{O}\times\mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测, 且对 $\forall a\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$, 有

$$Y_t^a=\int_{[0,t]}H_s^a\cdot dX_s\qquad\text{a.s.}.\tag{11.10}$$

设 μ 为 $\mathbb{R}$ 上的有限 Borel 测度，则

$$H_t^{\mu} \equiv \int_{\mathbb{R}} H_t^a \mu(da), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

仍为有界可料过程，且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_{[0,t]} H_s^{\mu} \cdot dX_s = \int_{\mathbb{R}} Y_t^a \mu(da) \qquad \text{a.s..} \tag{11.11}$$

证 只须证上述结果在任一有限区间 $[0,T]$ 成立. 先设 $H_t^a(\omega) = H_t(\omega)h(a)$, 其中 H 为有界可料过程， h 为有界 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测函数. 对于这类函数，定理显然成立. 由积分的线性性质，对其有限线性组合全体 $\widetilde{\mathcal{H}}$, 定理仍然成立.

对任一满足定理条件之 $\widetilde{H}$, 必存在 $\{\widetilde{H}_n\} \subset \widetilde{\mathcal{H}}$, 使 $|\widetilde{H}_n| \leq |\widetilde{H}|$, 且 $\widetilde{H}_n \longrightarrow \widetilde{H}$ 对 $\forall a \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$ 成立. 于是存在满足定理要求之 $\{\widetilde{Y}_n\}$, 使对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, (11.10) 及 (11.11) 关于 $\widetilde{Y}_n$ 成立. 由定理 11.10, 对 $\forall a \in \mathbb{R}$, 随机积分 $Y_n^a \equiv \int H_n^a \cdot dX$ 依概率在 $[0,T]$ 一致收敛于 $\int H^a \cdot dX$; 同理， $Y_n^a \equiv \int_{\mathbb{R}} Y_n^a \mu(da) = \int H_n^{\mu} \cdot dX$ 也依概率在 $[0,T]$ 一致收敛于 $\int H^{\mu} \cdot dX$.

为选子序列 $\{n_k\}$ 使其 a.s. 一致收敛，注意到此序列依赖于参数 a, 故必须使 $n_k(a)$ 关于 a 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测. 令

$$U_{n,m}^a \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} |Y_n^a(t) - Y_m^a(t)|,$$

由 Y_n^a 轨道右连续性， $(\omega, a) \longmapsto U_{n,m}^a(\omega)$ 为 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测. 由定理 11.10, 当 $n, m \longrightarrow \infty$ 时 $U_{n,m}^a$ 依概率收敛于 0. 令 $n_0(a) \equiv 1$, 对 $k \geq 1$ 令

$$n_k(a) \equiv \inf\{n \geq k \vee n_{k-1}(a); \sup_{m,m' \geq n} P(U_{mm'}^a > 2^{-k}) \leq 2^{-k}\},$$

则 $n_k(a)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测，且对 $\forall a \in \mathbb{R}$, $n_k(a) \uparrow \infty$.

记 $\widetilde{Z}_k = \widetilde{Y}_{n_k}$，$\widetilde{K}_k = \widetilde{H}_{n_k}$. 则对 $\forall k \in \mathbb{N}$，$\widetilde{Z}_k$ 为 $\mathcal{O} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测，$\widetilde{K}_k$ 为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测，且对 $\forall a \in \mathbb{R}$ 有

$$Z_k^a = \int K_k^a \cdot dX, \qquad Z_k^\mu = \int K_k^\mu \cdot dX.$$

由 Z_k^a 轨道右连续性，

$$(\omega, a) \longmapsto V_{n,m}^a(\omega) \equiv \sup_{0 \le t \le T} |Z_n^a(t,\omega) - Z_m^a(t,\omega)|$$

为 $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测. 由 $\{n_k\}$ 的选取可知，对 $\forall k, m \in \mathbb{N}$ 及 $a \in \mathbb{R}$ 有

$$P\{V_{k,k+m}^a > 2^{-k}\} \le 2^{-k}.$$

于是由 Borel-Cantelli 引理，对 $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega \mathbf{1}_{A^c}(\omega, a) P(d\omega) = 0,$$

其中

$$A \equiv \{(\omega, a); \lim_{n,m \to \infty} V_{n,m}^a(\omega) = 0\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

令 $\widetilde{Y} \equiv \overline{\lim}_{k\to\infty} \widetilde{Z}_k$, 则 $\widetilde{Y}$ 为 $\mathcal{O} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测，当 $(\omega, a) \in A$ 时，Y^a 为 Z_k^a 的一致收敛极限. 但由 Fubini 定理，

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A^c}(\omega, a) \mu(da) = 0 \qquad \text{a.s.},$$

故在一个零概率集之外，当 $k \longrightarrow \infty$ 时，对 $t \in [0, T]$ 一致地有

$$Z_k^\mu \equiv \int_{\mathbb{R}} Z_k^a \mu(da) \longrightarrow Y^\mu \equiv \int_{\mathbb{R}} Y^a \mu(da).$$

固定 $a \in \mathbb{R}$. 因为 $\{Z_k^a\}$ 及 $\{K_k^a\}$ 分别为 $\{Y_n^a\}$ 及 $\{H_n^a\}$ 的子序列，故 Z_k^a 依概率一致收敛于 $\int H^a \cdot dX$, 因而 (11.10) 成立. 同理，Z_k^μ 依概率一致收敛于 $\int H^\mu \cdot dX$, 因而 (11.11) 成立. 定理证毕. ∎

半鞅概念的引进是随机过程和随机分析理论中的一件大事．可以证明：半鞅这个随机过程类具有许多优良性质，例如半鞅经过 C^2 函数的复合 (§13)，随机时刻变换 (§14)，概率测度的绝对连续替换 (§15) 等等．仍然是一个半鞅 (详尽的讨论可参看 Jacod[1])．值得注意的是，若 H 为简单可料过程，且对任一右连左极适应过程 X，按 Stieltjes 方式定义 $\int H\cdot dX$，可以证明，为使映象 $X\longmapsto\int H\cdot dX$ 在依概率于有限区间一致收敛拓扑意义下为连续，必须且只须 X 为半鞅．因此，从理论上看来，为保持积分应有的线性和连续性质，并包含随机 Stieltjes 积分为其特殊情形，半鞅是能用来定义随机积分的最广的一类过程．这方面的详细讨论可参看 Bichteler[1], Dellacherie[2] 和 Protter[1]．随机积分更深入的结果，可参看 Meyer[3], Métivier-Pellaumail[1]，严加安 [2]，随机积分算子的谱分析，可参看黄志远 [1,6]，黄志远、廖玉麟 [1]．

§12. 平方变差过程

在 §7 中我们讨论了 Brown 运动的平方变差．设 $t>0$,

$$\pi_t^n:\ 0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{k_n}^n=t,\ n\in\mathbb{N}$$

为区间 $[0,t]$ 的一个分割序列，$\delta(\pi_t^n)$ 由 (7.4) 定义，对 $\mathbb{R}_+$ 上任一实值函数，由 (7.5) 定义 $\pi_t^n(f)$．设 W 为一维 Brown 运动，我们已经证明了当 $\delta(\pi_t^n)\longrightarrow 0$ 时 $\pi_t^n(W(\cdot,\omega))\xrightarrow{L^2} t$ (命题 7.1)．现在利用这个结果来计算伊藤积分 $\int_0^t W_s dW_s$．令

$$W_s^{(n)}\equiv\sum_{j=1}^{k_n}W(t_{j-1}^n)\mathbf{1}_{(t_{j-1}^n,t_j^n]}(s),\qquad 0\le s\le t,\tag{12.1}$$

则 $W^{(n)}$ 为形如 (7.15) 的简单 (可料) 过程，且对 $\forall\omega$ 及 $\forall s\in[0,t]$，由 W 的样本连续性质，有

$$\lim_{n\to\infty}W^{(n)}(s,\omega)=W(s,\omega).$$

由于当 $n \longrightarrow \infty$ 时

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t (W_s^{(n)})^2 ds\Big] = \sum_{j=1}^{k_n} t_{j-1}^n (t_j^n - t_{j-1}^n)$$

$$\longrightarrow t^2/2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^t W_s^2 ds\Big],$$

根据定理 4.7(用有限测度 $\lambda \times P$ 代替那里的概率测度 P), 有

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t (W_s^{(n)} - W_s)^2 ds\Big] \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty),$$

根据等距性质 (9.18), 有

$$\int_0^t W_s^{(n)} dW_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t W_s dW_s, \tag{12.2}$$

但

$$\int_0^t W_s^{(n)} dW_s = \sum_{j=1}^{k_n} W(t_{j-1}^n)(W(t_j^n) - W(t_{j-1}^n)),$$

即 Stieltjes 和 (7.8)(其中分点 $u_j^n = t_{j-1}^n$ 为区间 $[t_{j-1}^n,\ t_j^n]$ 的左端点). 在 §7 中已证明当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时, 此和均方收敛于 $\frac{1}{2}(W_t^2 - t)$, 因此

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t) \qquad \text{a.s.}, \tag{12.3}$$

或

$$W_t^2 - 2\int_0^t W_s dW_s = t \qquad \text{a.s..} \tag{12.4}$$

换句话说, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \pi_t^n(W.) = W_t^2 - 2\int_0^t W_s dW_s \qquad (L^2). \tag{12.5}$$

本节将把这个结果推广到一般的连续局部鞅.

定理 12.1 设 $M \in \mathfrak{M}_{loc}^c$, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 及 $[0,t]$ 之分割序列 $\{\pi_t^n\}$, 当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \pi_t^n(M.) = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s \qquad (\text{依概率收敛}). \tag{12.6}$$

若 M 为连续 L^2 鞅, 则上述收敛为 L^1 收敛; 若 M 为连续有界鞅, 则上述收敛为 L^2 收敛.

证 先设 M 为有界连续鞅, 因 $M_0 = 0$, 故

$$\begin{aligned} M_t^2 &= \sum_{j=1}^{k_n}[M(t_j^n)^2 - M(t_{j-1}^n)^2] \\ &= \pi_t^n(M.) + 2\sum_{j=1}^{k_n} M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)). \end{aligned} \tag{12.7}$$

令

$$M_s^{(n)} \equiv \sum_{j=1}^{k_n} M(t_{j-1}^n)1_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s),$$

由 M 之样本连续性质, 对 $\forall\omega$ 及 $s \in [0,t]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} M^{(n)}(s,\omega) = M(s,\omega),$$

由 M 之有界性可知 $M^{(n)}$ 在 $\mathcal{H}_M^2$ 中收敛, 根据算子 I_M 的连续性质, 当 $n \longrightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k_n} M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)) \\ &= \int_0^t M_s^{(n)} dM_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t M_s dM_s, \end{aligned}$$

由 (12.7) 即知当 $n \longrightarrow \infty$ 时有

$$\pi_t^n(M.) \xrightarrow{L^2} M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s.$$

再设 M 为连续局部鞅, 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 令

$$\tau_m \equiv \inf\{t; |M_t| > m\},$$

则 $\{\tau_m\}$ 为停时列, 且 $\tau_m \uparrow \infty$ a.s., 对 $\forall m \in \mathbb{N}$, 停止过程 M^{τ_m} 为有界连续鞅. 由于在集合 $[\tau_m \geq t]$ 上 $\pi_t^n(M.)$ 与 $\pi_t^n(M.^{\tau_m})$ 一致, 后者 L^2 收敛于

$$M_{\tau_m \wedge t}^2 - 2\int_0^{\tau_m \wedge t} M_s dM_s,$$

故

$$1_{[\tau_m \geq t]}\pi_t^n(M.) \xrightarrow{P} 1_{[\tau_m \geq t]}\Big(M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s\Big),$$

因为 $P\{\bigcup_m [\tau_m \geq t]\} = 1$, 所以 (12.6) 成立.

最后设 M 为连续 L^2 鞅. 由定理 10.9, $\int M \cdot dM$ 仍为连续 L^2 鞅, 因此 $\mathbb{E}[\int_0^t M_s dM_s] = 0$, 而由 (12.7) 得

$$\mathbb{E}[\pi_t^n(M.)] = \mathbb{E}[M_t^2], \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

根据定理 4.6, 可知 (12.6) 为 L^1 收敛. ∎

定义 12.2 对 $M \in \mathfrak{M}_{loc}^c$, 定义

$$[M]_t \equiv M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{12.8}$$

过程 $[M] = \{[M]_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 称为 M 的**平方变差过程**.

显然, $[M]$ 为连续适应过程, 且 $[M]_0 = 0$. 由定理 12.1, 作为 $\pi_t^n(M.)$ 的极限, 显然随 t 而递增, 即对 $s < t$ 有 $[M]_s \leq [M]_t$ a.s., 根据样本连续性可知, $[M]$ 为一连续增过程. 特别当 M 为连续 L^2 鞅时, $[M]$ 为可积连续增过程.

将 (12.8) 改写为

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s dM_s + [M]_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{12.9}$$

即连续下鞅 M^2 表示成一个连续鞅 $2\int M \cdot dM$ 和一个可积连续增过程 $[M]$ 之和. 这种分解实际上是唯一的. 因为若 M^2 还可表示成另一个连续鞅 N 和另一个可积连续增过程 U 之和: $M^2 = N + U$, 则 $[M] - U = N - 2\int M \cdot dM \in \mathcal{V}$, 且同时为连续鞅, 根据命题 11.5, 它是不足道过程, 即 $[M]$ 和 U 无区别, N 和 $2\int M \cdot dM$ 无区别.

在连续局部鞅的情况下, 由命题 11.5 的推论, 分解式 (12.9) 仍然是唯一的. 这是著名的 Doob-Meyer 分解定理 (Meyer[1,2]) 的一个特殊情形. 这样, 我们证明了以下定理:

定理 12.3 设 M 为连续局部鞅 (连续 L^2 鞅), 则平方变差过程 $[M]$ 是使 $M^2 - [M]$ 为连续局部鞅 (连续鞅) 的唯一连续增过程 (可积连续增过程).

对于两个连续局部鞅, 还可以定义其交互变差过程.

定义 12.4 对 $M, N \in \mathfrak{M}_{loc}^c$, 定义

$$[M, N] \equiv \frac{1}{2}\Big\{[M+N] - [M] - [N]\Big\} \tag{12.10}$$

为 M 和 N 的**交互变差过程**.

易见, $[M, N]$ 是连续有限变差过程, 当 $M = N$ 时, $[M, M] = [M]$ 是连续增过程. 由于

$$MN = \frac{1}{2}\Big\{(M+N)^2 - M^2 - N^2\Big\}, \tag{12.11}$$

从 (12.11) 逐项减去 (12.10) 相应各项, 应用定理 12.3 即可证明:

定理 12.5 设 M, N 为连续局部鞅 (连续 L^2 鞅), 则交互变差过程 $[M, N]$ 是使 $MN - [M, N]$ 为连续局部鞅 (连续鞅) 的唯一连续有限变差过程 (可积连续有限变差过程).

习题 2.8 设 $M,N \in \mathfrak{M}^c_{loc}$, 证明对任意停时 τ 有

$$[M^\tau, N^\tau] = [M,N]^\tau. \tag{12.12}$$

和定理 12.1 对应，我们有

定理 12.6 设 $M,N \in \mathfrak{M}^c_{loc}$, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 及 $[0,t]$ 之分割序列 $\{\pi^n_t\}$, 当 $\delta\{\pi^n_t\} \longrightarrow 0$ 时有：

$$\sum_{j=1}^{k_n}(M(t^n_j) - M(t^n_{j-1}))(N(t^n_j) - N(t^n_{j-1})) \xrightarrow{P} [M,N]_t. \tag{12.13}$$

若 M,N 为连续 L^2 鞅，则上述收敛为 L^1 收敛.

证 由 (12.11),(12.13) 左边可写为

$$\frac{1}{2}\Big[\pi^n_t(M.+N.) - \pi^n_t(M.) - \pi^n_t(N.)\Big],$$

由定理 12.1, 当 $n \longrightarrow \infty$ 时上述各项分别收敛于 (12.10) 右边各项, 故有定理结论. ∎

当 M 为连续 L^2 鞅时，从 (12.9) 可知，下鞅 M^2 和 $[M]$ 有相同的 Doléans 测度 (它们之间只差一个鞅 $2\int M \cdot dM$, 而鞅之 Doléans 测度为 0). 当 M 及 N 均为连续 L^2 鞅时，由定理 12.3 可知，拟鞅 MN 和 $[M,N]$ 有相同的 Doléans 测度. 更进一步，我们有以下结果：

定理 12.7 设 M 为连续 L^2 鞅，其平方变差过程为 $[M]$, 则对 $\forall A \in \mathcal{P}$ 有

$$\mu_{M^2}(A) = \mu_{[M]}(A) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty 1_A d[M]_s\Big]; \tag{12.14}$$

若 H 为满足条件 (10.12) 之可料过程，则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_{[[0,t]]} H^2 d\mu_{M^2} = \mathbb{E}\Big[\int_0^t H^2_s d[M]_s\Big]. \tag{12.15}$$

证 当 $A=((\sigma,\tau]]$, $\sigma,\tau\in\mathcal{T}_b$ 时，显然有

$$\mu_{[M]}(A)=\mathbb{E}\Big[[M]_\tau-[M]_\sigma\Big]=\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \mathbf{1}_A d[M]_s\Big].$$

注意 (12.14) 右边实际上在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 上定义了一个 σ- 有限测度，它既然在半环 $\mathcal{I}_b$ 上和 $\mu_{[M]}=\mu_{M^2}$ 一致，故在 $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{I}_b)$ 上也一致，得证 (12.14).

在 (12.15) 中先设 $H=\mathbf{1}_A$，$A\in\mathcal{P}$. 此时 $\mathbf{1}_{[0,t]}H^2$ 也是可料集的示性函数，(12.15) 化为 (12.14). 由线性性质可知当 H 为简单可料过程时，(12.15) 仍成立；对一般的满足条件 (10.12) 之可料过程 H, 存在简单可料过程序列 $\{H^{(n)}\}$, 使当 $n\longrightarrow\infty$ 时有

$$\mathbf{1}_{[0,t]}(H^{(n)})^2\uparrow\mathbf{1}_{[0,t]}(H)^2,$$

由单调收敛定理即得 (12.15). ∎

定理 12.8 设 $M,N\in\mathfrak{M}_c^2$, $H\in\mathcal{H}_M^2$, $G\in\mathcal{H}_N^2$. 则随机 Stieltjes 积分

$$V_t\equiv\int_0^t H_sG_sd[M,N]_s,\qquad t\in\mathbb{R}_+$$

存在，可积，且对 $\forall A\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu_V(A)=\int_A HGd\mu_{MN}. \tag{12.16}$$

证 由 Kunita-Watanabe 不等式可知 (12.16) 右边积分存在，且在 $\mathcal{P}$ 上定义了一个符号测度.

先设 $G\equiv 1$, $H=\mathbf{1}_A$, $A=((\sigma,\tau]]$, $\sigma,\tau\in\mathcal{T}_b$, $\sigma\le\tau$. 注意到 $[M,N]$ 和 MN 有相同的 Doléans 测度，此时

$$V_t=[M,N]_{\tau\wedge t}-[M,N]_{\sigma\wedge t},\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

$$\begin{aligned}\mu_V(\mathbb{R}_+\times\Omega)&=\mathbb{E}[V_\infty]=\mathbb{E}[[M,N]_\tau-[M,N]_\sigma]\\&=\mathbb{E}[(MN)_\tau-(MN)_\sigma]=\mu_{MN}(A)\\&=\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega}HGd\mu_{MN}.\end{aligned} \tag{12.17}$$

既然上式对 $A\in\mathcal{I}_b$ 均成立，$\mathcal{I}_b$ 为半环，且 $\mathcal{P}=\sigma(\mathcal{I}_b)$, 应用单调类定理可证当 $H\in\mathcal{H}_M^2$ 时上式仍成立. 对 $A\in\mathcal{P}$, 以 $H1_A$ 代 H, 即有 (12.16) 式. 但此即当 $G=1_A$ 时的 (12.17) 式，再一次应用单调类定理可证当 $G\in\mathcal{H}_N^2$ 时 (12.17) 仍成立. 对 $A\in\mathcal{P}$, 再以 $G1_A$ 代 G, 便得到 (12.16) 式，且同时证明了积分的存在性. ∎

定理 12.9 设 $M,N\in\mathfrak{M}_{loc}^c$, $H\in\mathcal{L}_{loc}^2(M)$, $G\in\mathcal{L}_{loc}^2(N)$, $X=\int H\cdot dM$, $Y=\int G\cdot dN$. 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[X,Y]_t=\int_0^t H_sG_sd[M,N]_s \qquad \text{a.s.}; \tag{12.18}$$

特别

$$[X]_t=\int_0^t H_s^2d[M]_s \qquad \text{a.s.}. \tag{12.19}$$

证 注意对停时 τ 有 $[M^\tau,N^\tau]=[M,N]^\tau$ (习题 2.8), 利用适当的局部化停时列并考虑停止过程，我们不妨假定 $M,N\in\mathfrak{M}_c^2$, 且 $H\in\mathcal{H}_M^2$, $G\in\mathcal{H}_N^2$. 此时 $X,Y\in\mathfrak{M}_c^2$.

由定理 9.4 推论 2, 对 $\forall A\in\mathcal{P}$ 有

$$\mu_{XY}(A)=\int_A HGd\mu_{MN}. \tag{12.20}$$

比较 (12.16) 及 (12.20) 两式，可知 $\mu_{XY}=\mu_V$, 其中

$$V_t=\int_0^t H_sG_sd[M,N]_s, \qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

因此 $\mu_{XY-V}\equiv 0$, 即 $XY-V$ 为连续鞅. 因 $[M,N]$ 是连续有限变差过程. 故其随机 Stieltjes 积分 V 也是 (可积) 连续有限变差过程. 但由定理 12.5, $[X,Y]$ 是使 $XY-[X,Y]$ 为连续鞅的唯一 (可积) 连续有限变差过程，故对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[X,Y]_t=V_t=\int_0^t H_sG_sd[M,N]_s \qquad \text{a.s.}.$$

特别，当 $M=N$, $H=G$ 时就得到 (12.19) 式. ∎

习题 2.9 设 $M\in\mathfrak{M}^c_{loc}$, 为使 M 为连续 L^2 鞅，必须且只须对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有 $\mathbb{E}([M]_t)<\infty$.

(提示：利用命题 10.2)

习题 2.10 设 $\{M^{(n)}\}$ 及 $\{N^{(n)}\}$ 在 $\mathfrak{M}^2_c$ 中分别收敛于 M 及 N, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[M^{(n)},N^{(n)}]_t\xrightarrow{P}[M,N]_t.$$

习题 2.11 设 $M\in\mathfrak{M}^c_{loc}$, $H\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, 则随机积分 $X=\int H\cdot dM$ 为唯一满足下式的连续局部鞅：

对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 及 $\forall N\in\mathfrak{M}^c_{loc}$ 有

$$[X,N]_t=\int_0^t H_s d[M,N]_s \qquad \text{a.s.}. \tag{12.21}$$

习题 2.12 设 M,N 为连续 L^2 鞅，H,G 为可料过程，分别对 M 及 N 满足条件 (10.12). 则对任何 $t>s\geq 0$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t H_u dM_u\Big)\Big(\int_s^t G_u dN_u\Big)\Big|\mathcal{F}_s\Big]\\ &=\mathbb{E}\Big[\int_s^t H_u G_u d[M,N]_u\Big|\mathcal{F}_s\Big] \qquad \text{a.s.},\end{aligned} \tag{12.22}$$

且上式中 s 和 t 可分别代以有界停时 σ 和 τ.

(提示：利用定理 12.9 中所证 $\mu_{XY}=\mu_V$, 分别计算其在可料矩形 $(s,t]\times F\in\mathcal{R}$ 及随机区间 $((\sigma|_F\bigwedge\tau,\tau]]\in\mathcal{I}_b$ 上的值).

关于一般 (未必连续) 的局部 L^2 鞅平方变差过程的讨论，由于涉及准备知识较多，且从本书后面各章应用来说，并不需要，所以不予介绍，有兴趣的读者可参看何声武、汪嘉冈、严加安 [1].

下面是一个用平方变差过程来刻划的连续局部鞅收敛定理，它有着重要的应用.

先证明一个不等式.

引理 12.10 设 $M \in \mathfrak{M}_{loc}^c$, 则对任意 $a>0, c>0$ 及 $t>0$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\le s\le t}|M_s|\ge c\Big\}\le \frac{a}{c^2}+P\Big\{[M]_t\ge a\Big\}. \tag{12.23}$$

证 令 $\tau\equiv\inf\{t;\ [M]_t\ge a\}$, 则 τ 为停时，且由习题 2.9 知，停止过程 M^τ 为 L^2 鞅，由极大值不等式 (6.10) 得

$$\begin{aligned}&P\{\sup_{0\le s\le t}|M_s^\tau|\ge c\}\le c^{-2}E[(M_t^\tau)^2]\\&=c^{-2}E([M]_{\tau\wedge t})\le a/c^2,\end{aligned}$$

但我们有

$$\Big\{\sup_{0\le s\le t}|M_s|\ge c\Big\}\subset\Big\{\sup_{0\le s\le t}|M_s^\tau|\ge c\Big\}\cup\Big\{\tau\le t\Big\}$$

$$\{\tau\le t\}\subset\{[M]_t\ge a\},$$

于是得证不等式 (12.23). ∎

习题 2.13 在引理 12.10 条件下，证明指数不等式:

$$P\Big\{[M]_t<a;\ \sup_{0\le s\le t}|M_s|\ge c\Big\}\le 2\exp\{-c^2/2a\}.$$

(提示: 令 $Z_s\equiv\exp\Big\{\frac{c}{a}M_s-\frac{c^2}{2a^2}[M]_s\Big\}$, 对 Z 应用上鞅极大值不等式 (6.9′)).

定理 12.11 设 $\{M^{(n)}\}\subset\mathfrak{M}_{loc}^c$, $M\in\mathfrak{M}_{loc}^c$ 且对 $t>0$ 有

$$[M^{(n)},M]_t\xrightarrow{P}0\qquad(n\longrightarrow\infty), \tag{12.24}$$

则

$$\sup_{0\le s\le t}|M_s^{(n)}-M_s|\xrightarrow{P}0\qquad(n\longrightarrow\infty). \tag{12.25}$$

证 只要对连续局部鞅 $M^{(n)}-M$ 应用不等式 (12.23). ∎

应用上最重要的连续局部鞅是关于 Brown 运动的随机积分. 设 $W=(W^1,W^2,\cdots,W^d)$ 是 d 维 $\mathscr{F}$ Brown 运动. 由 (12.4) 可知, $[W^j]_t=t(j=1,2,\cdots,d)$. 由于 Brown 运动各分量相互独立, 不难由 (12.13) 看出当 $i\neq j$ 时, $[W^i,W^j]_t=0$. 因此我们有

$$[W^i,W^j]_t=\delta_{ij}t \qquad (i,j=1,2,\cdots,d). \tag{12.26}$$

设 $\boldsymbol{H}=(H_j^i)_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq d}$ 为可测适应过程构成的 $m\times d$ 矩阵, 其中每个元素属于 $\mathcal{L}^2_{loc}$(简记为: $\boldsymbol{H}\in\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d)$), 令

$$X_t^i=\sum_{k=1}^d\int_0^t H_k^i(s)dW_s^k \qquad (i=1,2,\cdots,m),\ t\in\mathbb{R}_+,$$

则 $X=(X^1,X^2,\cdots,X^m)$ 为 m 维连续局部鞅. 上式可用矩阵记号写为

$$X_t=\int_0^t \boldsymbol{H}_s\cdot dW_s, \qquad t\in\mathbb{R}_+. \tag{12.27}$$

根据定理 12.9, 可以计算 X 各分量的交互变差过程:

$$\begin{aligned}[X^i,X^j]_t&=\sum_{k=1}^d\int_0^t H_k^i(s)H_k^j(s)ds\\ &=\int_0^t\Phi^{ij}(s)ds \qquad (i,j=1,2,\cdots,m),\end{aligned} \tag{12.28}$$

其中 $\Phi=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*$. 若我们在 $\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$ 中定义矩阵的 Hilbert -Schmidt 范数为

$$\|\boldsymbol{H}\|^2\equiv\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d(H_j^i)^2, \tag{12.29}$$

则由定理 12.11 立即推出:

定理 12.12 设 W 为 d 维 Brown 运动, $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, $\{H^{(n)}\} \subset \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$. 若对 $t > 0$ 有

$$\int_0^t \|H_s^{(n)} - H_s\|^2 ds \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty), \tag{12.30}$$

则

$$\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^t H_s^{(n)} \cdot dW_s - \int_0^t H_s \cdot dW_s\right| \xrightarrow{P} 0 \qquad (n \to \infty). \tag{12.31}$$

类似地, 我们可以定义 $\mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$ (参看定义 10.11). 可证明以下结果:

习题 2.14 设 W 为 d 维 Brown 运动, $H \in \mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, $\{H^{(n)}\} \subset \mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t H_s \cdot dW_s\Big)\Big(\int_0^t H_s \cdot dW_s\Big)^*\Big] = \int_0^t \mathbb{E}[H_s H_s^*]ds. \tag{12.32}$$

特别

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t H_s \cdot dW_s\Big|^2\Big] = \int_0^t \mathbb{E}[\|H_s\|^2]ds, \tag{12.33}$$

且

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathbb{E}[\|H_s^{(n)} - H_s\|^2]ds \longrightarrow 0 \Longrightarrow \\ &\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t H_s^{(n)} \cdot dW_s - \int_0^t H_s \cdot dW_s\Big|^2\Big] \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{12.34}$$

令 $M = \int H \cdot dW$, 则 M 为 m 维连续 L^2 鞅, $|M|^2$ 为一维连续下鞅, 对 $c > 0$, $T > 0$ 有

$$P\Big\{\sup_{0<s\leq T}|M_s| \geq c\Big\} \leq c^{-2}\int_0^T \mathbb{E}[\|H_s\|^2]ds \tag{12.35}$$

及

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq T}|M_s|^2\Big] \leq 4\int_0^T \mathbb{E}[\|H_s\|^2]ds. \tag{12.36}$$

第三章 随机微分和伊藤公式

§13. 连续半鞅的伊藤公式

半鞅还具有一个引人注目的性质,即当 X 为半鞅,而 $f \in C^2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上二次连续可微函数) 时, $f(X)$ 仍为半鞅. 而且有一套"复合函数微分公式",称为伊藤公式. 它和通常微分公式不同之处在于多了一个二阶项.

本章限于讨论连续半鞅的随机积分和伊藤公式. 假定 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备概率空间, 子 σ- 代数流 $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 满足通常条件.

设 $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一维连续半鞅. 由 §11 讨论可知, 它具有下面唯一的分解式:

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{13.1}$$

其中 X_0 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量, $M = \{M_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为连续局部鞅, $V = \{V_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为连续有限变差过程, $M_0 = V_0 = 0$. 我们有以下重要定理:

定理 13.1 设连续半鞅 X 具有分解式 (13.1), $f = f(x, y, z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的函数, 关于 x 二次、关于 y 一次连续可微, 关于 z Borel 可测. 令

$$Y_t = f(M_t, V_t, X_0) \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

则 $Y = \{Y_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为连续半鞅, 且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned} f(M_t, V_t, X_0) =& f(0,0,X_0) + \int_0^t f'_x(M_s, V_s, X_0)dM_s \\ &+ \int_0^t f'_y(M_s, V_s, X_0)dV_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f''_{x^2}(M_s, V_s, X_0)d[M]_s \qquad \text{a.s..} \end{aligned} \tag{13.2}$$

证 记 V 之全变差过程为 $\overline{V}$, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 令

$$\tau_n=\begin{cases}0, & \text{若 } |X_0|>n,\\ \inf\{t;\ |M_t|\vee\overline{V}_t\vee[M]_t>n\}, & \text{若 } |X_0|\le n,\end{cases}$$

则 $\{\tau_n\}$ 为停时列, 且 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s.. 如果我们对一切 n 在集合 $[\tau_n>0]$ 上对停止过程 X^{τ_n} 证明了 (13.2), 那么只要令 $n\longrightarrow\infty$, 可知 (13.2) 对 X 仍成立. 故不妨设 $X_0,M,\overline{V}$ 及 $[M]$ 均有界, 且 f 具有紧支集 (因而其本身连同一、二阶导数均有界).

任意固定 $t>0$, 考虑 $[0,t]$ 的分割序列 $\{\pi_t^n\}$(我们沿用 §12 的记号), 由 Taylor 展式至二阶项取中值公式得

$$\begin{aligned}&f(M_t,V_t,X_0)-f(0,0,X_0)\\ =&\sum_{j=1}^{k_n}[f(M(t_j^n),V(t_j^n),X_0)-f(M(t_j^n),V(t_{j-1}^n),X_0)]\\ &+\sum_{j=1}^{k_n}[f(M(t_j^n),V(t_{j-1}^n),X_0)-f(M(t_{j-1}^n),V(t_{j-1}^n),X_0)]\\ =&I_1^{(n)}+I_2^{(n)}+I_3^{(n)},\end{aligned}\tag{13.3}$$

其中

$$I_1^{(n)}\equiv\sum_{j=1}^{k_n}f'_y(M(t_j^n),\theta_j^n,X_0)(V(t_j^n)-V(t_{j-1}^n))$$

$$(\theta_j^n \text{ 介于 } V(t_j^n) \text{ 及 } V(t_{j-1}^n) \text{ 之间 }),$$

$$I_2^{(n)}\equiv\sum_{j=1}^{k_n}f'_x(M(t_{j-1}^n),V(t_{j-1}^n),X_0)(M(t_j^n)-M(t_{j-1}^n)),$$

$$I_3^{(n)}\equiv\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}f''_{x^2}(\widetilde{\theta}_j^n,V(t_{j-1}^n),X_0)(M(t_j^n)-M(t_{j-1}^n))^2$$

$$(\widetilde{\theta}_j^n \text{ 介于 } M(t_j^n) \text{ 及 } M(t_{j-1}^n) \text{ 之间 }).$$

显然，当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时，作为轨道的 Stieltjes 和

$$I_1^{(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^t f_y'(M_s, V_s, X_0) dV_s. \tag{13.4}$$

若令

$$\phi^{(n)}(s,\omega) \equiv \sum_{j=1}^{k_n} f_x'(M(t_{j-1}^n), V(t_{j-1}^n), X_0) 1_{(t_{j-1}^n, t_j^n]}(s),$$

则对 $\forall\omega$ 及 $s \in [0,t]$ 有 $\phi^{(n)} \longrightarrow f_x'(M,V,X_0)$. 因 f_x' 及 M 有界，此收敛也是 $\mathcal{H}_M^2$ 中收敛，因此由随机积分算子 I_M 的等距性质，有

$$I_2^{(n)} = \int_0^t \phi_s^{(n)} dM_s \xrightarrow{L^2} \int_0^t f_x'(M_s, V_s, X_0) dM_s. \tag{13.5}$$

剩下要证明 $I_3^{(n)}$ 收敛于 $\frac{1}{2}\int_0^t f_{x^2}''(M_s, V_s, X_0) d[M]_s$. 为此先证明以下引理：

引理 13.2 设 M 为有界连续鞅，H 为有界连续适应过程，对 $n \in \mathbb{N}$ 令

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))^2,$$

则当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时有

$$S_n \xrightarrow{P} \int_0^t H_s d[M]_s. \tag{13.6}$$

证 对 $n \in \mathbb{N}$ 令

$$\widetilde{S}_n \equiv \sum_{j=1}^{k_n} H(t_{j-1}^n)([M](t_j^n) - [M](t_{j-1}^n)),$$

显然

$$\widetilde{S}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \int_0^t H_s d[M]_s,$$

为证 (13.6), 只须证 $S_n-\widetilde{S}_n\xrightarrow{P}0$. 因为对 $0\le r<s\le t$ 有

$$\begin{aligned}&(M_s-M_r)^2-([M]_s-[M]_r)\\&=(M_s^2-[M]_s)-(M_r^2-[M]_r)-2M_r(M_s-M_r)\\&=2\Big[\int_r^s M_udM_u-M_r(M_s-M_r)\Big]\ (\text{根据}(12.8).)\end{aligned}$$

令

$$H^{(n)}=\sum_{j=1}^{k_n}H(t_{j-1}^n)1_{(t_{j-1}^n,t_j^n]},$$

$$M^{(n)}=\sum_{j=1}^{k_n}M(t_{j-1}^n)1_{(t_{j-1}^n,t_j^n]},$$

则

$$\begin{aligned}&S_n-\widetilde{S}_n\\&=2\sum_{j=1}^{k_n}H(t_{j-1}^n)\Big[\int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n}M_udM_u-M(t_{j-1}^n)(M(t_j^n)-M(t_{j-1}^n))\Big]\\&=2\sum_{j=1}^{k_n}\Big[\int_{(t_{j-1}^n,t_j^n]}H(t_{j-1}^n)M_udM_u-\int_{(t_{j-1}^n,t_j^n]}H(t_{j-1}^n)M(t_{j-1}^n)dM_u\Big]\\&=2\int_0^t H_u^{(n)}(M_u-M_u^{(n)})dM_u,\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了 (9.29) 式 (习题 2.5). 由 H 及 M 的连续性质, $H^{(n)}(M-M^{(n)})$ 在 $[0,t]\times\Omega$ 上收敛于 0, 根据 H 及 M 的有界性可知在 $\mathcal{H}_M^2$ 中收敛于 0, 由算子 I_M 的等距性质, $S_n-\widetilde{S}_n\xrightarrow{L^2}0$, 当然更有 $S_n-\widetilde{S}_n\xrightarrow{P}0$. ∎

在定理中, 令 $H=\frac{1}{2}f''_{x^2}(M,V,X_0)$, 显然它是有界连续适应过

程，根据引理得

$$\widetilde{I}_3^{(n)} \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n} f''_{x^2}(M(t_{j-1}^n), V(t_{j-1}^n), X_0)(M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n))^2$$

$$\xrightarrow{P} \frac{1}{2}\int_0^t f''_{x^2}(M_s, V_s, X_0)d[M]_s, \tag{13.7}$$

由 f''_{x^2} 及 M 的一致连续性，当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时有

$$\delta_n \equiv \max_{1\le j\le k_n} \Big| f''_{x^2}(\widetilde{\theta}_j^n, V(t_{j-1}^n), X_0) - f''_{x^2}(M(t_{j-1}^n), V(t_{j-1}^n), X_0)\Big| \xrightarrow{P} 0,$$

根据定理 12.1, $\pi_t^n(M.)$ L^2 收敛，故

$$\left|I_3^{(n)} - \widetilde{I}_3^{(n)}\right| \le \frac{1}{2}\delta_n \pi_t^n(M.) \xrightarrow{P} 0. \tag{13.8}$$

综合 (13.7) 和 (13.8) 得证

$$I_3^{(n)} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}\int_0^t f''_{x^2}(M_s, V_s, X_0)d[M]_s. \tag{13.9}$$

在 (13.3) 中取极限，由 (13.4), (13.5) 及 (13.9) 即得 (13.2) 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ a.s. 成立，又因等式两边的过程均连续，所以它们无区别. ∎

(13.2) 式称为一维**伊藤公式**，下面是它的另一种常用形式：

定理 13.3 设 X 为连续半鞅具有分解式 (13.1), $f \in C^2(\mathbb{R})$, 则 $Y \equiv \{f(X_t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 为连续半鞅，且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[M]_s \text{ a.s.}. \tag{13.10}$$

证 令 $g(x,y,z) = f(x+y+z)$, 则 g 满足定理 13.1 的条件，且

$$g(M_t, V_t, X_0) = f(X_0 + M_t + V_t) = f(X_t),$$

$g(0,0,X_0)=f(X_0), g'_x(M_t,V_t,X_0)=f'(X_t), g'_y(M_t,V_t,X_0)=f'(X_t)$, $g''_{x^2}(M_t,V_t,X_0)=f''(X_t)$, 代入 (13.2) 式即得. ∎

关于多维的伊藤公式，其证明和一维情形完全类似，所不同的是利用定理 12.6, 以交互变差代替平方变差，得到引理 13.2 的一个推广. 这里我们不详细给出证明.

定理 13.4 设 $M=(M^1,\cdots,M^m)$ 为 m 维连续局部鞅 (M_0 不必为 0), $V=(V^1,\cdots,V^n)$ 为 n 维连续有限变差过程 (V_0 也不必为 0). 函数 $f=f(x,y)(x=(x_1,\cdots,x_m)\in \mathbb{R}^m, y=(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbb{R}^n)$ 关于 $x_i(i=1,\cdots,m)$ 二次连续可微，关于 $y_j(j=1,\cdots,n)$ 一次连续可微. 令 $Y_t=f(M_t,V_t)$, 则 $Y=\{Y_t,t\in \mathbb{R}_+\}$ 为连续半鞅，且对 $\forall t\in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned}f(M_t,V_t)&=f(M_0,V_0)+\sum_{i=1}^m\int_0^t f'_{x_i}(M_s,V_s)dM_s^i\\&+\sum_{j=1}^n\int_0^t f'_{y_j}(M_s,V_s)dV_s^j\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m\int_0^t f''_{x_ix_j}(M_s,V_s)d[M^i,M^j]_s \qquad \text{a.s..}\end{aligned} \tag{13.11}$$

类似于 (13.10), 多维伊藤公式还有以下形式:

定理 13.5 设 $X=(X^1,\cdots,X^d)$ 为 d 维连续半鞅. 具有分解式:

$$X_t^i=X_0^i+M_t^i+V_t^i \qquad (i=1,\cdots,d),$$

其中 X_0^i 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量，M^i 为连续局部鞅，V^i 为连续有限变差过程 $(i=1,\cdots,d)$.

设函数 $f\in C^2(\mathbb{R}^d)$. 则 $Y=\{f(X_t),t\in \mathbb{R}_+\}$ 为连续半鞅，且

对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t f'_{x_i}(X_s) dX_s^i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t f''_{x_i x_j}(X_s) d[M^i, M^j]_s \text{ a.s..} \end{aligned} \tag{13.12}$$

特别，当 $f(x,y) = xy$, 时，我们可以得到关于连续半鞅随机积分的分部积分公式：

定理 13.6 设 X 和 Y 为一维连续半鞅，具有分解式： $X_t = X_0 + M_t + U_t$, $Y_t = Y_0 + N_t + V_t$. 则 XY 为连续半鞅，且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [M, N]_t \text{ a.s..} \tag{13.13}$$

特别，若 X 和 Y 都是连续有限变差过程，则 $M \equiv N \equiv 0$, 就化为 Stieltjes 积分的分部积分公式.

注 在伊藤公式 (13.2),(13.10),(13.11),(13.12) 和分部积分公式 (13.13) 中，由于等式两边均为连续过程，它们之间无区别，故常时刻 t 可代以停时 τ. 又若分别考虑实部和虚部，可以将结果推广到复值函数.

作为特例，我们得到关于 Brown 运动的伊藤公式. 考虑自 $x \in \mathbb{R}^d$ 出发的 d 维 Brown 运动 $X = x + W$, 其中 $W = (W^1, \cdots, W^d)$ 是从 0 出发的 d 维 Brown 运动. 根据 (12.26) 式,

$$[W^i, W^j]_t = \delta_{ij} t \qquad (i, j = 1, 2, \cdots d).$$

由定理 13.5 得

命题 13.7 设 W 为 d 维 Brown 运动，$x \in \mathbb{R}^d$, $X = x + W$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$. 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$f(X_t) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_i f(X_s) dW_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(X_s) ds \text{ a.s..} \tag{13.14}$$

应用伊藤公式，还可以得到 Brown 运动的鞅刻画定理. 我们知道，一维 Brown 运动 W 是连续 L^2 鞅，且 $[W]_t = t$. 下面定理表明，这些特征刻画了 Brown 运动：

定理 13.8 设 X 为一维连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程，且 $X_0 = 0$. 则以下命题等价：

1° X 是 $\mathfrak{F}$ Brown 运动;

2° X 是局部 $\mathfrak{F}$ 鞅，且 $[X]_t = t\ (t \in \mathbb{R}_+)$;

3° 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $Z_t^\alpha \equiv \exp\left\{i\alpha X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}(t \in \mathbb{R}_+)$ 为 $\mathfrak{F}$ 鞅.

证 1° $\Longrightarrow$ 2° 是已知的，现证 2° $\Longrightarrow$ 3°.

固定 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令 $f(x,y) = \exp\left\{i\alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 y\right\}$, 则 $f'_x = i\alpha f$, $f'_y = \frac{1}{2}\alpha^2 f$, $f''_{x^2} = -\alpha^2 f$. 在伊藤公式 (13.2) 中令 $M_t = X_t$, $V_t = t$, $X_0 = 0$ 即得

$$Z_t^\alpha = f(X_t, t) = 1 + i\alpha \int_0^t Z_s^\alpha dX_s. \tag{13.15}$$

由习题 2.9 可知 X 为 L^2 鞅，又因为 $|Z_s^\alpha| \le \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 s\right)$ 在任一有限区间有界，自然满足条件 (10.12), 由定理 10.9 可知 Z^α 为鞅.

为证 3° $\Longrightarrow$ 1°, 注意由 Z^α 的鞅性，对 $s < t$ 有 $\mathbb{E}[Z_t^\alpha|\mathcal{F}_s] = Z_s^\alpha$ a.s., 即对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\alpha X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}\Big|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left\{i\alpha X_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s\right\} \qquad \text{a.s.},$$

两边除以 $\exp\left\{i\alpha X_s + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}$(注意它是 $\mathcal{F}_s$ 可测随机变量且不等于 0) 得

$$\mathbb{E}[\exp\{i\alpha(X_t - X_s)\}|\mathcal{F}_s] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)\right\} \qquad \text{a.s.},$$

即 $X_t - X_s$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 的条件特征函数为正态 $N(0, t-s)$ 变量的特征函数，故 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立，且服从正态 $N(0, t-s)$ 分布，因而 X 为 $\mathcal{F}$ Brown 运动. ∎

关于多维 Brown 运动，完全类似地可以证明如下鞅刻画定理：

定理 13.9 设 X 为 d 维连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程，且 $X_0=0$. 则以下命题等价：

1° X 是 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动；

2° X 是 d 维局部 $\mathfrak{F}$ 鞅，且

$$[X^i,X^j]_t=\delta_{ij}t \qquad (t\in \mathbb{R}_+,i,j=1,2,\cdots,d);$$

3° 对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}^d$，$Z_t^\alpha\equiv\exp\left\{i(\alpha,X_t)+\frac{1}{2}|\alpha|^2t\right\}$ $(t\in\mathbb{R}_+)$ 为 $\mathfrak{F}$ 鞅(其中 (α,X_t) 表示 $\mathbb{R}^d$ 中内积，$|\alpha|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中范数).

习题 3.1 利用伊藤公式证明，若 W 为一维 Brown 运动，$X_t=\exp\{W_t-t/2\}(t\in\mathbb{R}_+)$，则 X 满足以下方程：

$$X_t=1+\int_0^t X_s dW_s \qquad (\text{a.s.},t\in\mathbb{R}_+).$$

习题 3.2 设 W 为 d 维 Brown 运动，Q 为 $d\times d$ 正交矩阵值可料过程，$M_t=\int_0^t Q_s\cdot dW_s$ $(t\in\mathbb{R}_+)$，则 M 也是 d 维 Brown 运动.

习题 3.3 设 X 为 d 维连续适应过程，且 $X_0=0$，则 X 为 d 维 Brown 运动的必要充分条件是：对 $\forall f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$($\mathbb{R}^d$ 上二次连续可微，且本身及其一、二阶偏导数均为有界的函数)

$$Z_t^f\equiv f(X_t)-\frac{1}{2}\int_0^t\Delta f(X_s)ds, \qquad t\in\mathbb{R}_+$$

为鞅.

习题 3.4 设 W 为 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动，τ 为有限 $\mathfrak{F}$ 停时. 令 $\widetilde{W}_t\equiv W_{\tau+t}-W_\tau$，$\widetilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{\tau+t}$ $(t\in\mathbb{R}_+)$，则 $\widetilde{W}$ 为 d 维 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ Brown 运动，且和 $\widetilde{\mathcal{F}}_0=\mathcal{F}_\tau$ 独立(此即 Brown 运动的强马氏性质).

最常见的连续半鞅是所谓伊藤过程.

定义 13.10 m 维连续半鞅 $X=(X^1,X^2,\cdots,X^m)$，若具有以下分解：

$$X=X_0+\int_0^t b(s)ds+\int_0^t\sigma(s)\cdot dW_s, \tag{13.16}$$

其中 $b=(b^1,\cdots,b^m)$ 为 m 维可测适应过程，满足：对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^t|b(s)|ds<\infty$ a.s. (简记为 $b\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$); $\sigma=(\sigma^i_j)$ $(1\le i\le m, 1\le j\le d)$ 为 $m\times d$ 矩阵值可测适应过程，且对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^t\|\sigma(s)\|^2ds<\infty$ a.s.(简记为 $\sigma\in\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d)$), X_0 为 m 维 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量，W 为 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动，则 X 称为 m 维伊藤过程.

将 (13.16) 用分量形式写出来，就是

$$X^i_t=X^i_0+\int_0^t b^i(s)ds+\sum_{j=1}^d\int_0^t\sigma^i_j(s)dW^j_s$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ t\in\mathbb{R}_+). \tag{13.16'}$$

应用伊藤公式于伊藤过程，便有

命题 13.11 设 X 为 m 维伊藤过程 (13.16), $f=f(t,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m)$(即定义于 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$ 上、关于 $t\in\mathbb{R}_+$ 一次连续可微，关于 $x\in\mathbb{R}^m$ 二次连续可微的连续函数)，并设 $Y_t=f(t,X_t)$, $t\in\mathbb{R}_+$. 则 $Y=\{Y_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一维伊藤过程，具有分解式：

$$f(t,X_t)=f(0,X_0)+\int_0^t(Lf)(s,X_s)ds$$
$$+\int_0^t(\nabla f(s,X_s),\sigma(s)\cdot dW_s)\ \text{a.s.},\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{13.17}$$

其中 $\nabla f\equiv(\partial_1 f,\partial_2 f,\cdots,\partial_m f)$ 为 f 之梯度，

$$(Lf)(t,x)\equiv\partial_t f(t,x)+\sum_{i=1}^m b^i(t)\partial_i f(t,x)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(t)\partial_i\partial_j f(t,x),$$

$$a^{ij}(t)=\sum_{k=1}^d\sigma^i_k(t)\sigma^j_k(t),\ (i,j=1,\cdots,m),$$

即矩阵 $a=\sigma\sigma^*$.

证 将 (13.16′) 增添一个分量 $X_t^{m+1}=t$, 然后应用伊藤公式 (13.12), 得

$$\begin{aligned}f(t,X_t)=&f(0,X_0)+\int_0^t\partial_s f(s,X_s)ds+\sum_{i=1}^m\int_0^t\partial_i f(s,X_s)dX_s^i\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m\int_0^t\partial_i\partial_j f(s,X_s)d[M^i,M^j]_s\quad \text{a.s.},\end{aligned}\tag{13.18}$$

其中

$$M_t^i=\sum_{j=1}^d\int_0^t\sigma_j^i(s)dW_s^j\qquad(i=1,2,\cdots,m).$$

注意到 (12.28) 式，我们有

$$\begin{aligned}[M^i,M^j]_t=\sum_{k=1}^d\int_0^t\sigma_k^i(s)\sigma_k^j(s)ds=\int_0^t a^{ij}(s)ds\\(i,j=1,2,\cdots,m),\end{aligned}\tag{13.19}$$

以 (13.16′) 及 (13.19) 代入 (13.18), 注意到定理 10.8 之 3°, 便得到 (13.17) 式. ∎

对 $M\in\mathfrak{M}_{loc}^c$, 我们记

$$M_t^*\equiv\sup_{0\le s\le t}|M_s|,\qquad t\ge 0.\tag{13.20}$$

利用伊藤公式，可以得到一个非常有用的估计式. 先证明一个引理：

引理 13.12 设 A,B 为两个可积连续适应增过程，且对一切停时 τ 有： $\mathbb{E}[A_\tau]\le\mathbb{E}[B_\tau]$, 则对一切 $q\in(0,1)$ 及一切停时 τ 有

$$\mathbb{E}[A_\tau^q]\le\frac{2-q}{1-q}\mathbb{E}[B_\tau^q].\tag{13.21}$$

证　对 $u>0$, 令 $\sigma \equiv \inf\{t\geq 0; B_t\geq u\}$, 则 σ 为停时，且 $\{B_\tau<u\}\subset\{\tau\leq\sigma\}$. 因此

$$\begin{aligned}&P\{A_\tau\geq u, B_\tau<u\}\leq P\{A_{\tau\wedge\sigma}\geq u\}\\&\leq u^{-1}\mathbb{E}[A_{\tau\wedge\sigma}]\leq u^{-1}\mathbb{E}[B_{\tau\wedge\sigma}]\\&\leq u^{-1}\mathbb{E}[u\wedge B_\tau]\\&\leq u^{-1}\mathbb{E}[B_\tau\mathbf{1}_{(B_\tau<u)}]+P\{B_\tau\geq u\},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&P\{A_\tau\geq u\}\leq P\{A_\tau\geq u, B_\tau<u\}+P\{B_\tau\geq u\}\\&\leq u^{-1}\mathbb{E}[B_\tau\mathbf{1}_{(B_\tau<u)}]+2P\{B_\tau\geq u\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[A_\tau^q]=\int_0^\infty P\{A_\tau\geq u\}qu^{q-1}du\\&\leq 2\int_0^\infty P\{B_\tau\geq u\}qu^{q-1}du+\int_0^\infty \mathbb{E}[B_\tau\mathbf{1}_{(B_\tau<u)}]qu^{q-2}du\\&=2\mathbb{E}[B_\tau^q]+\mathbb{E}\left[B_\tau\int_{B_\tau}^\infty qu^{q-2}du\right]\\&=2\mathbb{E}[B_\tau^q]-\frac{q}{q-1}\mathbb{E}[B_\tau^q]\\&=\frac{2-q}{1-q}\mathbb{E}[B_\tau^q],\end{aligned}$$

引理得证. ∎

下面是重要的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式：

定理 13.13 (BDG 不等式)　对一切 $p>0$ 存在只依赖于 p 的普适常数 $C_p>0$ 及 $\widetilde{C}_p>0$ 使

$$\widetilde{C}_p\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}]\leq\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p]\leq C_p\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}]\qquad(13.22)$$

对一切 $M\in\mathfrak{M}_{loc}^c$ 及一切停时 τ 成立 (若其中一项为无穷，则其他项为无穷).

证 先设 $p\ge 2$. 考虑停止过程, 不妨设 $M,[M]$ 及 τ 均有界 (否则以 $\tau\wedge n$ 代 τ, 然后令 $n\longrightarrow\infty$). 对 $f(x)\overset{\text{def}}{=}|x|^p$ 及有界连续鞅 M 应用伊藤公式得

$$\begin{aligned}|M_\tau|^p=&p\int_0^\tau |M_t|^{p-1}\mathrm{sgn}(M_t)dM_t\\&+\frac{1}{2}p(p-1)\int_0^\tau |M_t|^{p-2}d[M]_t,\end{aligned}$$

其中 sgn (x) 当 $x\ge 0$ 时为 1, 当 $x<0$ 时为 -1. 因右边第一项期望为 0, 故

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|M_\tau|^p]\le\frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E}\Big[\int_0^\tau |M_t|^{p-2}d[M]_t\Big]\\&\le\frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E}[(M_\tau^*)^{p-2}[M]_\tau]\\&\le\frac{1}{2}p(p-1)(\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p])^{1-2/p}(\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}])^{2/p}.\end{aligned}$$

考虑停止鞅 M^τ, 由鞅的极大值不等式 (6.11)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p]\le\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\mathbb{E}[|M_\tau|^p]\\&\le\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}(\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p])^{1-2/p}(\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}])^{2/p}.\end{aligned}$$

两边同时除以 $(\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p])^{1-2/p}$, 令

$$C_p=\Big(\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\Big)^{p/2}\tag{13.23}$$

即得 (13.22) 右边不等式. 为证左边不等式, 令

$$N_t\equiv\int_0^t [M]_s^{(p-2)/4}dM_s,\qquad t\ge 0.$$

则 N 为连续鞅，且

$$[N]_t=\int_0^t [M]_s^{(p-2)/2}d[M]_s=\frac{2}{p}[M]_t^{p/2}.$$

由分部积分公式 (13.13)

$$M_\tau[M]_\tau^{(p-2)/4}=\int_0^\tau M_t d([M]_t^{(p-2)/4})+N_\tau,$$

得

$$|N_\tau|\le 2M_\tau^*[M]_\tau^{(p-2)/4}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}]&=\frac{p}{2}\mathbb{E}[[N]_\tau]=\frac{p}{2}\mathbb{E}[N_\tau^2]\\&\le 2p\mathbb{E}[(M_\tau^*)^2[M]_\tau^{(p-2)/2}]\\&\le 2p(\mathbb{E}[(M_\tau^*)^p])^{2/p}(\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}])^{1-2/p}.\end{aligned}$$

两边同时除以 $(\mathbb{E}[[M]_\tau^{p/2}])^{1-2/p}$, 令

$$\widetilde{C}_p=(2p)^{-p/2}, \tag{13.24}$$

即得 (13.22) 左边不等式. 特别当 $p=2$ 时，我们有

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}[[M]_\tau]\le\mathbb{E}[(M_\tau^*)^2]\le 4\mathbb{E}[[M]_\tau].$$

既然 $[M]$ 及 M^* 为连续增过程，应用引理 13.12 可以证明 (13.22) 对 $p<2$ 仍成立. ∎

特别，我们有以下推论:

推论 设 W 为 d 维 Brown 运动，$\boldsymbol{H}$ 为 $m\times d$ 矩阵值可测适应过程，且对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t\|\boldsymbol{H}_s\|^2ds\right]<\infty, \tag{13.25}$$

(简记为 $H \in \mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d)$, 参看习题 2.13). 令 $M_t \equiv \int_0^t H_s \cdot dW_s$ $(t \in \mathbb{R}_+)$, 则对 $p > 0$ 存在 $C_p > 0$ 及 $\tilde{C}_p > 0$, 使对 $\forall T > 0$ 有

$$\tilde{C}_p \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \|H_s\|^2 ds\Big)^{p/2}\Big] \le \mathbb{E}[(M_T^*)^p]$$
$$\le C_p \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T \|H_s\|^2 ds\Big)^{p/2}\Big]. \tag{13.26}$$

§14. 随机微分和随机时刻变换

在随机分析中，随机积分是基本的概念，随机微分是导出的概念．本节主要按伊藤清 [5] (也可参看 Ikeda-Watanabe[1]) 的思想，系统地考察连续半鞅的随机积分，并得到关于随机微分的一整套公式．

仍假定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 满足通常条件．为简洁起见，在本节中将使用以下记号：

$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^c_{loc}$, 即初值为 0 的连续局部鞅全体；

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{V}_c$, 即初值为 0 的连续有限变差过程全体； $\mathcal{A}_+$ 为其中连续增过程全体；

$\mathcal{Q}$ 为连续半鞅全体， $\mathcal{H}$ 为局部有界可料过程全体．

显然，对通常的加法、乘法及数乘而言， $\mathcal{A}, \mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{H}$ 为实数域上的交换代数，但 $\mathfrak{M}$ 对乘法不封闭，只是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间．此外，我们有以下包含关系：

$$\mathfrak{M} \cup \mathcal{A} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{H}. \tag{14.1}$$

若 $X \in \mathcal{Q}$, 则 X 可唯一地表示为

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{14.2}$$

其中 X_0 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量， $M \in \mathfrak{M}$, $V \in \mathcal{A}$. 这种分解称为典型分解．

定义 14.1 设 $X, Y \in \mathcal{Q}$. 若对 $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$X_t - X_s = Y_t - Y_s \qquad \text{a.s.,} \tag{14.3}$$

则称 X 与 Y 有相同的 **随机微分**：$dX = dY$. 并且记

$$\int_s^t dX_u = X_t - X_s, \qquad s, t \in \mathbb{R}_+. \tag{14.4}$$

实际上，由 (14.3) 确定了 $\mathcal{Q}$ 中一种等价关系，dX 就是包含 X 在内的等价类. 按 (14.4), 可以把随机微分 dX 看成一个随机的区间函数.

一切随机微分构成一个空间：

$$d\mathcal{Q} \equiv \{dX;\ X \in \mathcal{Q}\},$$

而

$$d\mathfrak{M} \equiv \{dM;\ M \in \mathfrak{M}\}$$

和

$$d\mathcal{A} \equiv \{dV;\ V \in \mathcal{A}\}$$

为其子空间. 在 $d\mathcal{Q}$ 中定义下列运算：

1° 加法：对 $X, Y \in \mathcal{Q}$, 定义

$$dX + dY \equiv d(X + Y); \tag{14.5}$$

2° 乘法：若 $X, Y \in \mathcal{Q}$, $X = X_0 + M + U$, $Y = Y_0 + N + V$ 为其典型分解，则定义

$$dX \cdot dY \equiv d[M, N], \tag{14.6}$$

其中 $[M, N]$ 为交互变差过程 (是连续有限变差过程);

3° $\mathcal{H}$ 乘：若 $X \in \mathcal{Q}$, $H \in \mathcal{H}$, $Z = \int H \cdot dX$, 则定义

$$H \cdot dX \equiv dZ. \tag{14.7}$$

由分部积分公式 (13.13) 可知对 $X,Y\in\mathcal{Q}$ 有

$$dX\cdot dY=d(XY)-X\cdot dY-Y\cdot dX. \tag{14.8}$$

定理 14.2 $d\mathcal{Q}$ 关于上述加法、乘法及 $\mathcal{H}$ 乘三种运算构成 $\mathcal{H}$ 上的交换代数，且

$$d\mathcal{Q}\cdot d\mathcal{Q}\subset d\mathcal{A},\qquad d\mathcal{A}\cdot d\mathcal{Q}=0,$$
$$d\mathcal{Q}\cdot d\mathcal{Q}\cdot d\mathcal{Q}=0. \tag{14.9}$$

证 注意对 $M,N\in\mathfrak{M}$, 有 $[M,N]\in\mathcal{A}$, 故由 (14.6) 立刻得到 (14.9) 以及乘法运算的结合律和交换律. 由此容易直接验证， $d\mathcal{Q}$ 关于乘法及加法运算构成可交换环. 由随机积分性质不难推出，对 $H,G\in\mathcal{H}$ 及 $X,Y\in\mathcal{Q}$ 有

$$\begin{cases} H\cdot(dX+dY)=H\cdot dX+H\cdot dY,\\ H\cdot(dX\cdot dY)=(H\cdot dX)\cdot dY,\\ (H+G)\cdot dX=H\cdot dX+G\cdot dX,\\ (HG)\cdot dX=H\cdot(G\cdot dX),\end{cases} \tag{14.10}$$

其中证明第 2 式时要应用定理 12.9, 证明第 4 式时要应用定理 10.8 之 3°. 因此， $d\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的交换代数. ∎

利用随机微分记号，伊藤公式 (13.10) 和 (13.12) 分别为

$$df(X)=f'(X)\cdot dX+\frac{1}{2}f''(X)\cdot dX\cdot dX, \tag{14.11}$$

$$df(X)=\sum_{i=1}^{d}\partial_i f(X)\cdot dX^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\partial_i\partial_j f(X)\cdot dX^i\cdot dX^j. \tag{14.12}$$

它和通常的复合函数微分公式不同之处在于多了一个二阶项.

为了使运算和通常的微分法则一致，我们在 $d\mathcal{Q}$ 中引进第四种运算：

4° 对称 $\mathcal{Q}$ 乘：对 $X,Y\in\mathcal{Q}$, 定义

$$Y\circ dX\equiv Y\cdot dX+\frac{1}{2}dX\cdot dY. \tag{14.13}$$

定理 14.3 dQ 关于加法、乘法及对称 Q 乘三种运算构成 Q 上的交换代数. 对 $X,Y,Z\in Q$ 有

$$\begin{cases} X\circ(dY+dZ)=X\circ dY+X\circ dZ,\\ (X+Y)\circ dZ=X\circ dZ+Y\circ dZ,\\ X\circ(dY\cdot dZ)=(X\circ dY)\cdot dZ=X\cdot(dY\cdot dZ),\\ (XY)\circ dZ=X\circ(Y\circ dZ).\end{cases} \tag{14.14}$$

若 $X=(X^1,X^2,\cdots,X^d)\in Q^d$, $f\in C^3(\mathbb{R}^d)$, 则 $f(X)\in Q$, 且

$$df(X)=\sum_{i=1}^{d}\partial_i f(X)\circ dX^i. \tag{14.15}$$

证 由 $dX\cdot dY$ 关于 X 及 Y 的双线性性质 (参照 (14.6)) 及 (14.13) 可知 $Y\circ dX$ 关于 Y 及 X 均为线性. 注意当 $X\in\mathcal{A}$ 或 $Y\in\mathcal{A}$ 时, $dX\cdot dY=0$, 故由 (14.13) 可知此时 $X\circ dY=X\cdot dY$. 因此

$$\begin{aligned} X\circ(Y\circ dZ)&=X\cdot(Y\circ dZ)+\frac{1}{2}dX\cdot(Y\circ dZ)\\ &=X\cdot(Y\cdot dZ)+\frac{1}{2}X\cdot(dY\cdot dZ)+\frac{1}{2}dX\cdot(Y\cdot dZ)\\ &=(XY)\cdot dZ+\frac{1}{2}d(XY)\cdot dZ=(XY)\circ dZ,\end{aligned}$$

其中利用了 (14.8) 及 $dX\cdot dY\cdot dZ=0$. 类似地可以证明其他.

又由 (14.12) 及 (14.9)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{d}\partial_i f(X)\circ dX^i=\sum_{i=1}^{d}\left[\partial_i f(X)\cdot dX^i+\frac{1}{2}d(\partial_i f(X))\cdot dX^i\right]\\ &=\sum_{i=1}^{d}\partial_i f(X)\cdot dX^i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left[\sum_{j=1}^{d}\partial_j\partial_i f(X)\cdot dX^j\right]\cdot dX^i\\ &=df(X), \end{aligned} \tag{14.16}$$

得证 (14.15). ∎

注意在 (14.16) 的推导中，利用了

$$d(\partial_i f(X)) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j \partial_i f(X) \cdot dX^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \partial_j \partial_k \partial_i f(X) \cdot dX^j \cdot dX^k$$

及

$$dX^j \cdot dX^k \cdot dX^i = 0,$$

所以必须假定 $f \in C^3(\mathbb{R}^d)$.

定义 14.4 设 $X, Y \in \mathcal{Q}$, 则存在 $Z \in \mathcal{Q}$, 使 $dZ = Y \circ dX$. 于是对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s \cong \int_0^t dZ_s = Z_t - Z_0 \tag{14.17}$$

唯一确定，称为 Y 关于 X 的 **对称随机积分**.

由于这种随机积分首先由 Stratonovich[1] 和 Fisk[1] 引进，所以又称为 **Stratonovich 积分** 或 **Fisk 积分**, 根据 (14.13), 它和伊藤积分有以下关系：

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s \cdot dX_s + \frac{1}{2}[M, N]_t, \tag{14.18}$$

其中 M, N 分别为 X, Y 的典型分解中的局部鞅部分，特别，当 X 及 Y 均为 Brown 运动 W 时有

$$\int_0^t W_s \circ dW_s = \int_0^t W_s \cdot dW_s + \frac{t}{2} = \frac{1}{2} W_t^2, \tag{14.19}$$

和形式上由分部积分得到的结果一致. 应用对称微积分的好处是：它的规则和通常的微积分一致，但是它要求条件较伊藤微积分严格 (被积过程为半鞅，且在微分公式 (14.15) 中要求 f 三次连续可

微), 且在这种意义下关于 L^2 鞅的随机积分未必为 L^2 鞅 (例如参看 (14.19)). 下一命题表明了 "对称" 这一名称的来由:

命题 14.5 设 $X, Y \in \mathcal{Q}$. 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 及 $[0,t]$ 之分割序列 $\{\pi_t^n\}$, 当 $\delta(\pi_t^n) \longrightarrow 0$ 时有

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{2}(Y(t_j^n) + Y(t_{j-1}^n))(X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n))$$

$$\text{(依概率收敛)} \qquad (14.20)$$

(我们沿用 §12 的记号).

证 (14.20) 右边的和可改写成

$$\sum_{j=1}^{k_n} Y(t_{j-1}^n)(X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n)) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k_n}(Y(t_j^n) - Y(t_{j-1}^n))$$
$$\times (X(t_j^n) - X(t_{j-1}^n)). \qquad (14.21)$$

若 $X \in \mathcal{A}$, 当 $n \longrightarrow \infty$ 时, 第一个和 a.s. 收敛于随机 Stieltjes 积分 $\int_0^t Y_s dX_s$, 第二个和 a.s. 收敛于 0; 若 $X \in \mathfrak{M}$, 如同定理 13.1 一样, 可证第一个和依概率收敛于伊藤积分 $\int_0^t Y_s \cdot dX_s$, 应用定理 12.6 可证第二个和依概率收敛于 $\frac{1}{2}[M,N]_t$ (其中 M 为 Y 的典型分解中的局部鞅部分, $N = X \in \mathfrak{M}$). 综合上述结果即有 (14.21) 依概率收敛于

$$\int_0^t Y_s \cdot dX_s + \frac{1}{2}[M,N]_t = \int_0^t Y_s \circ dX_s. \quad ∎$$

现在讨论伊藤过程 (13.16′) 的随机积分

$$dX^i = b^i \cdot dt + \sum_{j=1}^d \sigma_j^i \cdot dW^j \qquad (i = 1, \cdots, m). \qquad (14.22)$$

关于 Brown 运动的伊藤微分基本公式是

$$\begin{cases} dW^i \cdot dW^j = \delta_{ij} dt & (i,j = 1,\cdots,d), \\ dW^i \cdot dt = 0 & (i = 1,\cdots,d). \end{cases} \qquad (14.23)$$

因此公式 (13.17) 化为

$$\begin{aligned}df(t,X)=&\partial_t f(t,X)dt+\sum_{i=1}^m\partial_i f(t,X)\cdot dX^i\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m\partial_i\partial_j f(t,X)\cdot dX^i\cdot dX^j\\=&\Big(\partial_t f+\sum_{i=1}^m b^i\partial_i f+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}\partial_i\partial_j f\Big)(t,X)\cdot dt\\&+\sum_{j=1}^d\Big(\sum_{j=1}^m\sigma_j^i\partial_i f\Big)(t,X)\cdot dW^j.\end{aligned}\tag{14.24}$$

因为根据 (12.28) 式有

$$dX^i\cdot dX^j=a^{ij}\cdot dt\qquad(i,j=1,\cdots,m),\tag{14.25}$$

用矩阵记号 (14.23),(14.25) 及 (14.24) 分别写为

$$dW\cdot(dW)^*=Idt\qquad(I\text{是单位矩阵}),\tag{14.23'}$$

$$dX\cdot(dX)^*=\sigma\sigma^*\cdot dt,\tag{14.25'}$$

$$df(t,X)=(Lf)(t,X)\cdot dt+(\nabla f(t,X),\sigma\cdot dW).\tag{14.24'}$$

下面讨论随机时刻变换问题.

设 $\phi\in\mathcal{A}_+$, 且 $\phi_t\uparrow\uparrow\infty$ a.s. (即严格单调递增). 对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 令

$$\phi_t^{-1}\equiv\inf\{s;\phi_s>t\},$$

则 ϕ^{-1} 为 ϕ 之反函数, 且

$$\phi_s=\inf\{t;\ \phi_t^{-1}>s\},\qquad\forall s\in\mathbb{R}_+.$$

因对 $\forall s,t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[\phi_t^{-1}\le s]=[t\le\phi_s]\in\mathcal{F}_s,$$

故 $\{\phi_t^{-1},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为一族递增的 $\mathfrak{F}$ 停时. 令

$$\tilde{\mathcal{F}}_t\equiv\mathcal{F}_{\phi_t^{-1}}\qquad(t\in\mathbb{R}_+),\tag{14.26}$$

则 $\tilde{\mathfrak{F}}=\{\tilde{\mathcal{F}}_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 $\mathcal{F}_\infty$ 之一族子 σ- 代数, 容易验证, $\tilde{\mathfrak{F}}$ 满足通常条件. 以 $\tilde{\mathcal{T}}$ 表示 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 停时全体, $\widetilde{\mathfrak{M}},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathcal{A}}_+,\tilde{\mathcal{Q}},\tilde{\mathcal{H}}$ 分别表示关于 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 的相应过程类, 则 $\phi^{-1}\in\tilde{\mathcal{A}}_+$, $\{\phi_s,\ s\in\mathbb{R}_+\}$ 为一族递增的 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 停时, 且有

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\phi_s}=\mathcal{F}_s\qquad(s\in\mathbb{R}_+).\tag{14.27}$$

定义 14.6 设 X 为 $\mathfrak{F}$ 循序过程, 令

$$\tilde{X}_t\equiv X_{\phi_t^{-1}}\qquad(t\in\mathbb{R}_+),\tag{14.28}$$

则 $\tilde{X}$ 为 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 适应过程, 称为过程 X(经过 ϕ) 的 **随机时刻变换**, 记为: $\tilde{X}=T^\phi X$.

引理 14.7 1° $\sigma\in\mathcal{T}\Longleftrightarrow\phi_\sigma\in\tilde{\mathcal{T}}$;

2° $T^\phi\mathfrak{M}=\widetilde{\mathfrak{M}}$, $T^\phi\mathcal{A}=\tilde{\mathcal{A}}$, $T^\phi\mathcal{Q}=\tilde{\mathcal{Q}}$, $T^\phi\mathcal{H}=\tilde{\mathcal{H}}$.

证 1° 设 $\sigma\in\mathcal{T}$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[\phi_\sigma\le t]=[\sigma\le\phi_t^{-1}]\in\mathcal{F}_{\phi_t^{-1}}=\tilde{\mathcal{F}}_t,$$

故 $\phi_\sigma\in\tilde{\mathcal{T}}$; 反之, 设 $\phi_\sigma\in\tilde{\mathcal{T}}$, 则对 $\forall s\in\mathbb{R}_+$ 有

$$[\sigma\le s]=[\phi_\sigma\le\phi_s]\in\tilde{\mathcal{F}}_{\phi_s}=\mathcal{F}_s,$$

故 $\sigma\in\mathcal{T}$.

2° 若 $X\in\mathfrak{M}$, 则存在 $\mathfrak{F}$ 停时列 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s. 使对 $\forall n\in\mathbb{N}$, X^{τ_n} 为有界连续 $\mathfrak{F}$ 鞅, 此时有 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 停时列 $\phi_{\tau_n}\uparrow\infty$ a.s., 且 $\tilde{X}_t^{\phi_{\tau_n}}=X_{\phi_t^{-1}}^{\tau_n}$. 由定理 6.10 可知 $\tilde{X}^{\phi_{\tau_n}}$ 为连续 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 鞅, 于是 $\tilde{X}\in\widetilde{\mathfrak{M}}$. 反之, 由 $T^\phi X\in\widetilde{\mathfrak{M}}$ 也可推出 $X\in\mathfrak{M}$, 此外显然有 $X\in\mathcal{A}_+\Longleftrightarrow T^\phi X\in\tilde{\mathcal{A}}_+$, 因此 $X\in\mathcal{A}\Longleftrightarrow T^\phi X\in\tilde{\mathcal{A}}$. 其余证明都是直接的. ∎

定理 14.8 设 $\phi \in \mathcal{A}_+$ 且 $\phi_t \uparrow\uparrow \infty$ a.s., T^ϕ 为由 (14.26) 及 (14.28) 所确定的随机时刻变换. 对 $X \in \mathcal{Q}$, 令 $T^\phi(dX) = d(T^\phi X)$, 则 T^ϕ 为由 $\mathcal{H}$ 上的交换代数 $d\mathcal{Q}$ 到 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上的交换代数 $d\widetilde{\mathcal{Q}}$ 的同构映象, 且关于对称 $\mathcal{Q}$ 乘运算有

$$T^\phi(X \circ dY) = (T^\phi X) \circ T^\phi(dY). \tag{14.29}$$

证 显然 $dX = dY \Longleftrightarrow d(T^\phi X) = d(T^\phi Y)$, 且当 $M, N \in \mathfrak{M}$ 时有

$$[T^\phi M,\ T^\phi N] = T^\phi[M, N]$$

(因为由定理 12.5, $[T^\phi M, T^\phi N]$ 是在 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 中使 $(T^\phi M)(T^\phi N) - [T^\phi M, T^\phi N] \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ 的唯一过程, 既然 $T^\phi[M,N] \in \widetilde{\mathcal{A}}$, 且 $(T^\phi M)(T^\phi N) - T^\phi[M,N] = T^\phi(MN - [M,N]) \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, 所以有 $T^\phi[M,N] = [T^\phi M, T^\phi N]$).

设 $M \in \mathfrak{M}$, $H \in \mathcal{H}$. 由习题 2.11, $X = \int H \cdot dM$ 为 $\mathfrak{M}$ 中满足下式的唯一元素: 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 及 $\forall N \in \mathfrak{M}$ 有

$$[X, N]_t = \int_0^t H_s d[M, N]_s \qquad \text{a.s.},$$

利用刚才证明的结果, 对上式进行变换 T^ϕ, 可知

$$T^\phi X = \int (T^\phi H) \cdot d(T^\phi M). \tag{14.30}$$

由于 $d\mathcal{Q}$ 中各种运算是用加法、随机积分及平方变差来定义, 因而 T^ϕ 为 $d\mathcal{Q}$ 到 $d\widetilde{\mathcal{Q}}$ 的同构映象. ∎

下面的定理是随机时刻变换的一个重要应用. 它说明在某些条件下, 选择适当的 "随机时钟", 一个连续局部鞅可以看作是 Brown 运动.

定理 14.9 设 $M \in \mathfrak{M}$, 且 $[M]_t \uparrow\uparrow \infty$ a.s., 令

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_{[M]_t^{-1}},\ \widetilde{M}_t \equiv M_{[M]_t^{-1}} \qquad (t \in \mathbb{R}_+), \tag{14.31}$$

则 $\widetilde{M}=\{\widetilde{M}_t,\ t\in \mathbb{R}_+\}$ 为 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ Brown 运动.

证 令 $\phi=[M]$, 则 $\widetilde{M}=T^\phi M$. 由引理 14.7 可知, $\widetilde{M}\in\widetilde{\mathfrak{M}}$. 由定理 14.8 的证明可知,

$$[\widetilde{M}]_t=[T^\phi M]_t=(T^\phi[M])_t=[M]_{[M]_t^{-1}}=t.$$

故由 Brown 运动的鞅刻画定理 13.8, $\widetilde{M}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ Brown 运动. ∎

注 当 $[M]_t\uparrow\infty$ a.s. (不必严格单调) 时, 仍有上述结果. 因为此时由

$$\tau_t\equiv\inf\{s;\ [M]_s>t\}\tag{14.32}$$

定义的 τ_t 为 $[M]_t$ 的右连续逆. 和定理 14.9 唯一不同之处是要证明 $\widetilde{M}_t=M_{\tau_t}$ 为连续. 为此, 只须证明对任意固定的 $s<t$, 除开一个零概率集合外有

$$\{[M]_t=[M]_s\}\subset\{M_u\equiv M_s,\ \forall u\in[s,t]\}.\tag{14.33}$$

令

$$\sigma\equiv\inf\{u>s;\ [M]_u>[M]_s\},$$

则 σ 为 $\mathfrak{F}$ 停时. 令

$$N_r\equiv M_{\sigma\wedge(s+r)}-M_s,\ \widehat{\mathcal{F}}_r\equiv\mathcal{F}_{\sigma\wedge(s+r)},$$

则 N 为 $\widehat{\mathfrak{F}}$ 局部鞅, 且

$$[N]_r=[M]_{\sigma\wedge(s+r)}-[M]_s=0\qquad(\forall r\in\mathbb{R}_+),$$

于是 $N\equiv 0$, 即 $M_{\sigma\wedge(s+r)}=M_s(\forall r\in\mathbb{R}_+)$ a.s., 这就证明了 (14.33).

§15. 指数鞅和 Girsanov 定理

作为伊藤公式的重要应用, 首先我们推广关于 Brown 运动的鞅刻画定理 (定理 13.8) 到一般连续局部鞅情形:

定理 15.1 设 M 为连续适应过程, $M_0=0$; U 为连续增过程. 则以下命题等价:

1° M 为局部鞅, 且 $[M]=U$;

2° 对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $Z_t^\alpha\equiv\exp\left\{\alpha M_t-\frac{1}{2}\alpha^2U_t\right\}$ 为局部鞅. 若上述条件满足, 则 Z^α 为上鞅; 当且仅当对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{E}[Z_t^\alpha]=1$ 时 Z^α 为鞅.

证 1° $\Longrightarrow$ 2° 任意固定 $\alpha\in\mathbb{R}$, 设 $f(x,y)=\exp\left\{\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2y\right\}$, 则 $f'_x=\alpha f$, $f''_{x^2}=\alpha^2f$, $f'_y=-\frac{1}{2}\alpha^2f$. 由伊藤公式 (13.2) (写成微分形式)

$$\begin{aligned}dZ_t^\alpha&=\alpha Z_t^\alpha\cdot dM_t-\frac{\alpha^2}{2}Z_t^\alpha dU_t+\frac{\alpha^2}{2}Z_t^\alpha d[M]_t\\&=\alpha Z_t^\alpha\cdot dM_t,\end{aligned}$$

故 Z^α 为连续局部鞅.

2° $\Longrightarrow$ 1° 考虑停时列: $\tau_n\equiv\inf\{t;|M_t|\bigvee U_t\geq n\}(n\in\mathbb{N})$ 及停止过程, 不妨设 M 及 U 有界且 Z^α 为鞅. 于是对 $s<t$ 及 $F\in\mathcal{F}_s$ 有

$$\int_F\exp\left\{\alpha M_s-\frac{\alpha^2}{2}U_s\right\}dP=\int_F\exp\left\{\alpha M_t-\frac{\alpha^2}{2}U_t\right\}dP,$$

在积分号下对 α 微分两次, 令 $\alpha=0$ 得

$$\int_F M_sdP=\int_F M_tdP \tag{15.1}$$

及

$$\int_F(M_s^2-U_s)dP=\int_F(M_t^2-U_t)dP, \tag{15.2}$$

于是 M 及 M^2-U 为连续鞅, 因 $[M]$ 为使 $M^2-[M]$ 为连续鞅的唯一连续增过程, 故 $[M]=U$.

当上述条件满足时， $Z_t^\alpha = \exp\left\{\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2[M]_t\right\}$ 为非负局部鞅，设 $\{\tau_n\}$ 为其局部化停时列，对 $s<t$ 有

$$(Z^\alpha)_s^{\tau_n} = \mathbb{E}\left[(Z^\alpha)_t^{\tau_n}\middle|\mathcal{F}_s\right] \qquad \text{a.s.}, \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

在上式中令 $n\longrightarrow\infty$, 由 Fatou 引理得

$$Z_s^\alpha \geq \mathbb{E}[Z_t^\alpha|\mathcal{F}_s] \qquad \text{a.s.},$$

故 Z^α 为上鞅. 因 $Z_0^\alpha=1$, 显然当且仅当 $\mathbb{E}[Z_t^\alpha]\equiv 1$ 时 Z^α 为鞅. ∎

下面利用指数鞅来讨论概率测度的变换问题. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一完备概率空间， $\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为满足通常条件的子 σ- 代数流. 若 Q 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上另一和 P 等价的概率测度 (即 $P\ll Q, Q\ll P$), 则 $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ 仍为完备概率空间， $\mathfrak{F}$ 关于 Q 仍满足通常条件. 不足道集、可选及可料 σ- 代数关于 P 和 Q 都是一样的. 令

$$M_\infty \equiv \frac{dQ}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_\infty}, \tag{15.3}$$

M 为一致可积正鞅 $\{\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t],\ t\in R_+\}$ 的右连续修正. 由定理 6.9, 对任意停时 τ 及 $F\in\mathcal{F}_\tau$ 有

$$\int_F M_\tau dP = \int_F M_\infty dP = Q(F),$$

因此

$$M_\tau = \frac{dQ}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_\tau} \qquad \text{a.s.}[P\sim Q]. \tag{15.4}$$

我们有以下简单结果:

命题 15.2 设 X 为一适应过程. 则当且仅当 XM 为 P(局部) 鞅时 X 为 Q(局部) 鞅.

证 任给 $s<t$ 及 $F\in\mathcal{F}_s$. 注意到 (15.4)(其中取 $\tau=t$), 当且仅当 X_tM_t 关于 P 可积时 X_t 关于 Q 可积，且

$$\int_F X_t dQ = \int_F X_t M_t dP; \tag{15.5}$$

同样地有

$$\int_F X_s dQ = \int_F X_s M_s dP; \tag{15.6}$$

比较 (15.5) 及 (15.6) 式，即知当且仅当 XM 为 P 鞅时 X 为 Q 鞅. 注意到 X 的局部化停时列也是 XM 的局部化停时列，故上述结论关于局部鞅仍成立. ∎

在概率测度作绝对连续替换下随机积分的变化问题是一个既有深刻理论意义又有实际应用价值的问题 (例如，在随机系统的控制和滤波问题中构造 "新息过程", 在讨论 Brown 运动轨道泛函的变分以求随机方程的弱解时，都要用到这种变换). 早在 1944 年 Cameron 和 Martin[1] 就得到了这方面的第一个结果，但他们讨论的是 Wiener 积分，即被积函数是决定性的. 1960 年，Girsanov[1] 讨论了伊藤积分情况，得到了著名的 Girsanov 定理. 下面的定理是 Van Schuppen 和 Wong[1] 的推广形式，即从 Brown 运动推广到了一般的连续局部鞅.

定理 15.3 设 M 为连续局部鞅，且

$$Z_t \equiv \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \tag{15.7}$$

为一致可积正鞅，令

$$Q \equiv \int Z_\infty dP.$$

若 N 为连续 P 局部鞅，则

$$\widetilde{N}_t \equiv N_t - [N, M]_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \tag{15.8}$$

为连续 Q 局部鞅，且

$$[\widetilde{N}]_t^Q = [N]_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{15.9}$$

其中 $[\widetilde{N}]^Q$ 表示在测度 Q 下的平方变差过程.

证 由定理 15.1, 只要证对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$Y_t^\alpha\equiv\exp\left\{\alpha\widetilde{N}_t-\frac{\alpha^2}{2}[N]_t\right\}$$

为连续 Q 局部鞅. 为此, 根据命题 15.2, 只要证 $Y^\alpha Z$ 为连续 P 局部鞅. 但

$$\begin{aligned}Y_t^\alpha Z_t&=\exp\left\{M_t-\frac{1}{2}[M]_t+\alpha N_t-\alpha[N,M]_t-\frac{\alpha^2}{2}[N]_t\right\}\\&=\exp\left\{(M_t+\alpha N_t)-\frac{1}{2}[M+\alpha N]_t\right\},\qquad t\in\mathbb{R}_+,\end{aligned}$$

由于 $M+\alpha N$ 为连续 P 局部鞅, 由定理 15.1 可知 $Y^\alpha Z$ 为连续 P 局部鞅, 定理得证. ∎

特别, 若 W 为一维 Brown 运动, $H\in\mathcal{L}^2_{loc}$, 则 $M\equiv\int H\cdot dW$ 为连续局部鞅, 且 $[M]_t=\int_0^t H_s^2ds$. 若令 $N=W$, 则由定理 12.9 得 $[M,N]_t=\int_0^t H_sds$, 于是有以下 Girsanov 定理:

定理 15.4(Girsanov) 设 $W=\{W_t,\ 0\leq t\leq T\}$ 为 Brown 运动, $H=\{H_t,\ 0\leq t\leq T\}$ 为可测适应过程, 满足

$$\int_0^T H_s^2ds<\infty\qquad\text{a.s.}.\tag{15.10}$$

对 $t\in[0,T]$, 令

$$Z_t(H)\equiv\exp\left\{\int_0^t H_sdW_s-\frac{1}{2}\int_0^t H_s^2ds\right\},\tag{15.11}$$

假定

$$\mathbb{E}[Z_T(H)]=1.\tag{15.12}$$

令 $Q\equiv\int Z_T(H)dP$, 及

$$\widetilde{W}_t\equiv W_t-\int_0^t H_sds\qquad(0\leq t\leq T),\tag{15.13}$$

则 $\widetilde{W}$ 为 Q Brown 运动.

证 由定理 15.1 可知 $\{Z_t(H),\ 0 \le t \le T\}$ 为连续正上鞅，由 $Z_0(H)=1$ 及 $\mathbb{E}[Z_T(H)]=1$ 可知它是一致可积正鞅，于是根据定理 15.3, $\widetilde{W}$ 为连续 Q 局部鞅，且 $[\widetilde{W}]_t^Q=[W]_t=t$. 根据 Brown 运动的鞅刻画定理 13.8, $\widetilde{W}$ 为 Q Brown 运动. ∎

上述两个定理的多维情形证明是一样的，叙述如下：

定理 15.5 在定理 15.3 条件下，设 $N=\{N^1,N^2,\cdots,N^d\}$ 为 d 维连续 P 局部鞅，令

$$\widetilde{N}^i = N^i - [N^i, M] \qquad (i=1,\cdots,d),$$

则 $\widetilde{N}=\{\widetilde{N}^1,\widetilde{N}^2,\cdots,\widetilde{N}^d\}$ 为 d 维连续 Q 局部鞅，且 $[\widetilde{N}^i]^Q = [N^i]$ $(i=1,\cdots,d)$.

定理 15.6 设 $W=\{W^1,\cdots,W^d\}$ 为 $[0,T]$ 上的 d 维 Brown 运动，$H=\{H^1,\cdots,H^d\}$ 为 $[0,T]\times\Omega$ 上的 d 维可测适应过程，满足

$$\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty \qquad \text{a.s.}. \tag{15.14}$$

对 $t\in[0,T]$, 令

$$Z_t(H) \equiv \exp\left\{ \int_0^t (H_s, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t |H_s|^2 ds \right\}, \tag{15.15}$$

假定 $\mathbb{E}[Z_T(H)]=1$. 令 $Q \equiv \int Z_T(H)dP$ 及

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t H_s ds, \tag{15.16}$$

则 $\widetilde{W}$ 为 d 维 Q Brown 运动.

从上述讨论可知，研究指数鞅 (15.7) 或 (15.11) 一致可积性的充分条件是很重要的，这方面的一个著名结果是 1972 年 Novikov[1] 得到的：

定理 15.7(Novikov) 设 M 为连续局部鞅，且

$$Z_t \equiv \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

若对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}[M]_t\Big)\Big] < \infty, \tag{15.17}$$

则 Z 为连续鞅，亦即对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

证 这里我们采用严加安 [1,2] 的简化证明. 令

$$Y_t \equiv \exp\left\{\frac{1}{2}[M]_t\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$Z_t^\alpha \equiv \exp\left\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}[M]_t\right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时

$$\begin{aligned} Z_t^\alpha &= \exp\left\{\alpha M_t - \frac{\alpha}{2}[M]_t + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}[M]_t\right\} \\ &= (Z_t)^\alpha\Big(\exp\left\{\frac{\alpha}{2}[M]_t\right\}\Big)^{1-\alpha} \\ &\le (Z_t)^\alpha (Y_t)^{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{15.18}$$

于是对 $F \in \mathcal{F}$ 及有界停时 τ, 由 Hölder 不等式有

$$\mathbb{E}[1_F Z_\tau^\alpha] \le (\mathbb{E}[Z_\tau])^\alpha (\mathbb{E}[1_F Y_\tau])^{1-\alpha}. \tag{15.19}$$

由条件 (15.17), 对任意 $T > 0$, 停止过程 Y^T 为可积增过程，因而为 D 类过程 (定理 6.13). 既然 Z 为非负上鞅 (定理 15.1), $\mathbb{E}[Z_\tau] \le \mathbb{E}[Z_0] = 1$, 由 (15.19) 可知停止过程 $(Z^\alpha)^T$ 为 D 类过程，从而

$$1 = \mathbb{E}[Z_T^\alpha] \le (\mathbb{E}[Z_T])^\alpha (\mathbb{E}[Y_T])^{1-\alpha}. \tag{15.20}$$

在上式中令 $\alpha \uparrow\uparrow 1$, 得 $1 \le \mathbb{E}[Z_T]$, 但 $\mathbb{E}[Z_T] \le \mathbb{E}[Z_0] = 1$, 故 $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. 定理证毕. ∎

推论 在定理 15.4 (或 15.6) 的情况下，若

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |H_s|^2 ds\right)\right] < \infty, \tag{15.21}$$

则 $\mathbb{E}[Z_T(H)] = 1$, 因而 $\{Z_t(H),\ 0 \le t \le T\}$ 为一致可积鞅.

特别，若存在常数 c, 使 $\sup_{s\le T}|H_s| \le c$ a.s., 则 (15.21) 总满足.

在定理 15.7 的证明中略加改变，Kazamaki[1] 证明了更强的结果：条件 (15.17) 可减弱为

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}M_t\right)\right] < \infty. \tag{15.22}$$

对 Novikov 准则的改进还可参看严加安 [1].

习题 3.5 设 W 为一维 Brown 运动，τ 为停时，满足 $\mathbb{E}[e^{\tau/2}] < \infty$. 求证： $\mathbb{E}[e^{W_\tau - \tau/2}] = 1$.

习题 3.6 在定理 15.4 情况下，若 $\exists\delta > 0$, 使

$$\sup_{t\le T}\mathbb{E}[\exp(\delta H_t^2)] < \infty, \tag{15.23}$$

则 $\mathbb{E}[Z_T(H)] = 1$.

(提示：利用 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 ds\right) &= \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{TH_s^2}{2} ds\right)\\ &\le \frac{1}{T}\int_0^T \exp\left(\frac{TH_s^2}{2}\right) ds,\end{aligned}$$

当 $T \le 2\delta$ 时即有 (15.21). 当 $T > 2\delta$ 时，可将 $[0,T]$ 分为若干其长度不超过 2δ 的区间来考虑).

§16. 连续局部鞅的随机积分表示

本节将讨论在理论上和应用上都有重要价值的关于局部鞅的随机积分表示问题.

设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 满足通常条件. 我们知道, 若 W 为 $\mathfrak{F}$ Brown 运动, $H \in \mathcal{H}^2_{loc}$, 则随机积分 $M = \int H \cdot dW$ 为连续 L^2 鞅; 若 $H \in \mathcal{L}^2_{loc}$, 则 $M \in \mathfrak{M}^c_{loc}$, 且其平方变差过程为

$$[M]_t = \int_0^t H_s^2 ds \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

下面定理是它的逆命题:

定理 16.1 设 M 为 d 维连续局部鞅, $M_0 = 0$, 且存在 $d \times d$ 矩阵值过程 $\boldsymbol{H} = (H^i_j) \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d)$, 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\det[\boldsymbol{H}(t)] \neq 0 \qquad \text{a.s.} \tag{16.1}$$

以及

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t \Phi^{ij}(s) ds \qquad \text{a.s.}(i, j = 1, \cdots, d), \tag{16.2}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*$, 则存在 d 维 Brown 运动 W 使

$$M_t = \int_0^t \boldsymbol{H}_s \cdot dW_s \qquad \text{a.s.}, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{16.3}$$

证 利用适当的局部化停时列, 不妨设 M 为连续 L^2 鞅及 $\boldsymbol{H} \in \mathcal{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d)$. 同时, 不妨限制于有限区间 $[0, T]$, 此时 $M \in \mathfrak{M}^2_c$. 设 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 之逆矩阵 (由条件 (16.1), 它 a.s. 有定义), 对 $n \in \mathbb{N}$ 及 $i, j = 1, 2, \cdots, d$ 令

$$(H^{(n)})^i_j(t, \omega) = \begin{cases} (H^{-1})^i_j(t, \omega), & \text{若 } \max_{i,j} |(H^{-1})^i_j(t, \omega)| \leq n, \\ 0, & \text{其他情况,} \end{cases}$$

则 $H^{(n)} = ((H^{(n)})^i_j(t,\omega))_{1\le i,j\le d}$ 为 $\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d$ 值有界循序过程，且当 $n\longrightarrow\infty$ 时有

$$\int_0^t \mathbb{E}[\|H_s^{(n)}\Phi_s H_s^{(n)*}-I\|^2]ds\longrightarrow 0,\qquad t\in T. \tag{16.4}$$

令

$$W_n(t)\equiv\int_0^t H_s^{(n)}\cdot dM_s,\qquad n\in\mathbb{N},\ t\le T, \tag{16.5}$$

则 $W_n\in\mathfrak{M}_c^2$, 由 (16.2) 及定理 12.9(参看 (12.28))

$$[W_n^i,W_n^j]_t=\int_0^t (H^{(n)}\Phi H^{(n)*})_s^{ij}ds\qquad \text{a.s.},$$
$$t\le T,\ n\in\mathbb{N}\ (i,j=1,2,\cdots,d). \tag{16.6}$$

由随机积分等距性质，(16.4) 蕴含当 $n\longrightarrow\infty$ 时，W_n 在 $\mathfrak{M}_c^2$ 中收敛于某个 W, 且由 (16.6) 及习题 2.10 可知

$$[W^i,W^j]_t=\delta_{ij}t\qquad \text{a.s., } t\le T,\ i,j=1,2,\cdots,d.$$

由定理 13.9, W 为 d 维 Brown 运动. 此外，由 (16.5) 可知

$$\int_0^t H_s\cdot dW_n(s)=\int_0^t (HH^{(n)})_s\cdot dM_s$$
$$=\int_0^t I_s^{(n)}\cdot dM_s, \tag{16.7}$$

其中

$$(I^{(n)})^i_j(t,\omega)=\begin{cases}\delta_{ij}, & \text{若 } \max_{i,j}|(H^{-1})^i_j(t,\omega)|\le n,\\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

在 (16.7) 中令 $n\longrightarrow\infty$, 由随机积分算子 I^H 的闭性 (参看定理 9.7) 得 (16.3) 式. ▮

在应用中 H 常为 $m\times d$ 矩阵，因而条件 (16.1) 不能满足. 为此我们要将概率空间予以拓广.

定义 16.2 称概率空间 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P},\tilde{\mathfrak{F}})$ 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 的拓广，如果存在映象

$$\pi:\ \tilde{\Omega}\longrightarrow\Omega$$

为 $\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$ 可测，且满足：

1° $\tilde{\mathcal{F}}_t\supset\pi^{-1}(\mathcal{F}_t)$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$;

2° $P=\tilde{P}\circ\pi^{-1}$;

3° 对 $\forall\xi\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$\tilde{\mathbb{E}}[\xi(\pi\tilde{\omega})|\tilde{\mathcal{F}}_t]=\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t](\pi\tilde{\omega})\qquad\text{a.s. }\tilde{P},\tag{16.8}$$

其中 $\tilde{\mathbb{E}}$ 表示关于 $\tilde{P}$ 的积分.

例 3.1 设 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 为一概率空间，$(\Omega',\mathcal{F}',P')$ 为另一概率空间. 令

$$\tilde{\Omega}=\Omega\times\Omega',\ \tilde{\mathcal{F}}=\mathcal{F}\times\mathcal{F}',\ \tilde{P}=P\times P',$$

π 为 $\tilde{\Omega}$ 到 Ω 的投影，$\tilde{\mathfrak{F}}$ 为 $\tilde{\mathcal{F}}$ 之任一满足条件：

$$\mathcal{F}_t\times\mathcal{F}'\supset\tilde{\mathcal{F}}_t\supset\mathcal{F}_t\times\{\Omega',\emptyset\},\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+$$

的子 σ- 代数流. 容易验证，$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P},\tilde{\mathfrak{F}})$ 是空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 的拓广. 这种拓广称为**标准拓广**.

注 若 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P},\tilde{\mathfrak{F}})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 的拓广，τ 为 $\mathfrak{F}$ 停时，则由 $\tilde{\tau}(\tilde{\omega})\equiv\tau(\pi\tilde{\omega})$ 定义的 $\tilde{\tau}$ 为 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 停时. 这是因为对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned}&[\tilde{\omega};\tilde{\tau}(\tilde{\omega})\le t]=[\tilde{\omega};\tau(\pi\tilde{\omega})\le t]\\&=\pi^{-1}[\omega;\tau(\omega)\le t]\in\pi^{-1}(\mathcal{F}_t)\subset\tilde{\mathcal{F}}_t.\end{aligned}$$

若 M 为 $\mathfrak{F}$ 鞅，则由 $\widetilde{M}_t(\tilde{\omega})\equiv M_t(\pi\tilde{\omega})$ 定义的过程 $\widetilde{M}$ 为 $\tilde{\mathfrak{F}}$ 鞅. 这是因为对 $s<t$ 有

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{E}}[\widetilde{M}_t(\tilde{\omega})|\tilde{\mathcal{F}}_s]=\tilde{\mathbb{E}}[M_t(\pi\tilde{\omega})|\tilde{\mathcal{F}}_s]\\&=\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s](\pi\tilde{\omega})=M_s(\pi\tilde{\omega})\\&=\widetilde{M}_s(\tilde{\omega})\qquad\qquad\text{a.s.}\tilde{P}.\end{aligned}$$

因此，若 M 及 N 为连续 $\mathfrak{F}$ 局部鞅，则 $\widetilde{M}$ 及 $\widetilde{N}$ 为连续 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 局部鞅，且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$[\widetilde{M}, \widetilde{N}]_t(\widetilde{\omega}) = [M, N]_t(\pi\widetilde{\omega}) \qquad \text{a.s. } \widetilde{P}. \tag{16.9}$$

事实上，因为 $MN - [M,N]$ 为连续 $\mathfrak{F}$ 局部鞅，故 $\widetilde{M}\widetilde{N} - \widetilde{[M,N]}$ 为连续 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 局部鞅，但由定理 12.5, $[\widetilde{M}, \widetilde{N}]$ 为使 $\widetilde{M}\widetilde{N} - [\widetilde{M}, \widetilde{N}]$ 为连续 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 局部鞅的唯一 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 适应连续有限变差过程，故 $\widetilde{[M,N]} = [\widetilde{M}, \widetilde{N}]$, 此即 (16.9) 式.

于是，$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 鞅、局部鞅等等均可自然地看作 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}, \widetilde{\mathfrak{F}})$ 鞅、局部鞅.

定理 16.3 设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 满足通常条件. M 为 m 维连续 $\mathfrak{F}$ 局部鞅，$M_0 = 0$. 且存在一 $m \times d$ 矩阵值过程 $\boldsymbol{H} \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, 满足

$$[M^i, M^j]_t = \int_0^t \Phi^{ij}(s)ds \qquad \text{a.s.}, \ t \in \mathbb{R}_+$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots, m), \tag{16.10}$$

其中 $\Phi = \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*$, 则存在 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 的一个拓广 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}, \widetilde{\mathfrak{F}})$ 及其上的 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动 W, 使

$$M_t = \int_0^t \boldsymbol{H}_s \cdot dW_s \qquad \text{a.s.}, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{16.11}$$

这里 M 及 $\boldsymbol{H}$ 均自然地看作 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}, \widetilde{\mathfrak{F}})$ 上的过程.

证 首先，不妨设 $m = d$(否则可以在 $\boldsymbol{H}$ 或 M 中增添一些零元素作为分量). 由于对一切 s 及 $\omega, \Phi(s,\omega)$ 为对称非负定，故存在唯一对称非负定平方根 $\Phi^{1/2}(s,\omega)$, 且 $\Phi^{1/2} \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^d \bigotimes \mathbb{R}^d)$. 不失一般性，可以假定 $\boldsymbol{H} = \Phi^{1/2}$ (在一般情况下，存在正交矩阵值可测适应过程 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\Phi^{1/2} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}$. 如果已经证明存在 Brown 运动 W, 使 $M = \int \Phi^{1/2} \cdot dW$, 则可令 $\widetilde{W} = \int \boldsymbol{Q}^* \cdot dW$, 由习题 3.2, $\widetilde{W}$ 仍为

Brown 运动，且 $\int \boldsymbol{H}\cdot d\widetilde{W} = \int \Phi^{1/2}\boldsymbol{Q}^*\cdot d\widetilde{W} = \int \Phi^{1/2}\cdot dW = M$，于是定理得证).

对 $u \in \mathbb{R}_+$，令

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(u) \equiv \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \boldsymbol{H}(u)(\boldsymbol{\Phi}(u)+\varepsilon \boldsymbol{I})^{-1},$$

$$\boldsymbol{E}_R(u) \equiv \widetilde{\boldsymbol{H}}(u)\boldsymbol{H}(u) = \boldsymbol{H}(u)\widetilde{\boldsymbol{H}}(u), \tag{16.12}$$

$$\boldsymbol{E}_N(u) \equiv \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_R(u),$$

则 $\boldsymbol{E}_R(u)$ 为到 $\boldsymbol{\Phi}(u)$ 的值域 $\boldsymbol{\Phi}(u)\mathbb{R}^d$(一般来说，是一个维数不超过 d 的线性空间) 的正交投影，且

$$\boldsymbol{E}_N(u)\boldsymbol{H}(u) = \boldsymbol{H}(u)\boldsymbol{E}_N(u) = 0. \tag{16.13}$$

设 W' 为任一概率空间 $(\Omega',\mathcal{F}',P',\mathfrak{F}')$ 上的 d 维 Brown 运动. 令 $\widetilde{\Omega} \equiv \Omega\times\Omega'$，$\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\times\mathcal{F}'$，$\widetilde{P} = P\times P'$，$\widetilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t\times\mathcal{F}'_t$ $(t\in\mathbb{R}_+)$. 则 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P},\widetilde{\mathfrak{F}})$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 的标准拓广. 此时 M 和 W' 均可看成这个拓广空间上的连续局部鞅 (我们均略去符号 " $\sim$ ")，且

$$\begin{cases} [M^i, M^j]_t = \int_0^t \Phi^{ij}(s)ds, \\ [M^i, W'^j]_t = 0, \qquad\qquad (i,j=1,2,\cdots,d) \\ [W'^i, W'^j]_t = \delta_{ij}t, \end{cases} \tag{16.14}$$

令

$$W_t \equiv \int_0^t \widetilde{\boldsymbol{H}}(s)\cdot dM_s + \int_0^t \boldsymbol{E}_N(s)\cdot dW'_s, \tag{16.15}$$

则由 (16.14) 有

$$[W^i, W^j]_t = \int_0^t (\widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{H}}^*)_s^{ij}ds + \int_0^t \boldsymbol{E}_N^{ij}(s)ds$$

$$= \int_0^t \boldsymbol{E}_R^{ij}(s)ds + \int_0^t \boldsymbol{E}_N^{ij}(s)ds = \delta_{ij}t,$$

$$t\in\mathbb{R}_+ (i,j=1,2,\cdots,d),$$

因此 W 为 d 维 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ Brown 运动. 注意到 (16.12) 及 (16.13), 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^t \boldsymbol{H}(s)\cdot dW_s &= \int_0^t (\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{H}})(s)\cdot dM_s + \int_0^t (\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}_N)(s)\cdot dW'_s \\ &= \int_0^t \boldsymbol{E}_R(s)\cdot dM_s = \int_0 (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}_N(s))\cdot dM_s \\ &= M_t - \int_0^t \boldsymbol{E}_N(s)\cdot dM_s, \qquad t\in\mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

若记 $X_t=\int_0^t \boldsymbol{E}_N(s)\cdot dM_s$, 则对 $i=1,2,\cdots,d$ 有

$$[X^i]_t = \int_0^t (\boldsymbol{E}_N\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{E}_N)_s^{ij}ds = 0, \qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

因而 $X\equiv 0$, 得证定理. ∎

上述随机积分表现问题, 是需要构造 Brown 运动. 若已给 Brown 运动 W, 要使连续局部鞅表示成为某个过程关于 W 的随机积分, 此时必须此局部鞅适应于 W 所生成的自然 σ- 代数流.

为使记号简单起见, 我们讨论一维 Brown 运动. 以 $\overline{\mathfrak{F}}^W=\{\overline{\mathcal{F}}_t^W, t\in\mathbb{R}_+\}$ 表示由一维 Brown 运动 W 所生成的自然 σ- 代数流. 由定理 1.8 可知, 此 σ- 代数流是连续的.

定理 16.4 设 M 为 (局部) L^2 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 鞅且 $M_0=0$. 则存在唯一的 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 可料过程 $H\in\mathcal{H}^2_{loc}(\mathcal{L}^2_{loc})$, 对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$M_t=\int_0^t H_s dW_s \qquad \text{a.s.}. \tag{16.16}$$

证 只须证 L^2 鞅情形, 且不妨局限于有限区间 $[0,T]$, 此时 $M\in\mathfrak{M}_0^2$. 由定理 9.5, 存在唯一 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 可料过程 $H\in\mathcal{H}^2_W$ 及与 W 强正交的 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 鞅 $N\in\mathfrak{M}_0^2$, 使

$$M_t=\int_0^t H_s dW_s + N_t \qquad \text{a.s.}, \forall t\in[0,T]. \tag{16.17}$$

由于 Rg (I_W) 为 $\mathfrak{M}_0^2$ 之稳定子空间 (习题 2.3), 且因有界鞅全体在 $\mathfrak{M}_0^2$ 中稠密，为证 Rg $(I_W)^\perp = 0$ (于是 $N \equiv 0$), 只要证明：和 Rg(I_W) 强正交的任一零初值有界 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 鞅必为不足道过程.

设 $|N| \le K$, K 为常数，且 $N \perp\!\!\!\perp$ Rg (I_W). 令

$$Z_t \equiv 1 + N_t/2K, \qquad 0 \le t \le T,$$

则 $Z_t \ge 1/2$, 且 $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. 在 $\overline{\mathcal{F}}_T^W$ 上定义另一概率测度 $Q \equiv \int Z_T dP$. 因为 $N \perp\!\!\!\perp W$, 故 NW 为 P 鞅，因而 $ZW = W + NW/2K$ 亦为 P 鞅. 由命题 15.2, W 为 Q 鞅.

同理，因为 $W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$, 而 $\int W \cdot dW \perp\!\!\!\perp N$, 故 $\{W_t^2 - t,\ t \in [0,T]\}$ 为 Q 鞅. 根据定理 13.8, W 为 Q Brown 运动. 根据 Brown 运动有限维分布的确定性，可知 P 和 Q 在 $\overline{\mathcal{F}}_T^W$ 上重合，即 $Z_T = 1$ a.s., 于是 $Z \equiv 1$, $N \equiv 0$. ∎

推论 1 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 局部 L^2 鞅均为连续局部鞅.

推论 2 设 $T > 0$, $\xi \in L^2(\Omega, \overline{\mathcal{F}}_T^W, P)$. 则存在 $\overline{\mathfrak{F}}^W$ 可料过程 $H = \{H_t,\ 0 \le t \le T\}$ 满足

$$\mathbb{E}[\int_0^T H_s^2 ds] < \infty$$

及

$$\xi = \mathbb{E}[\xi|\overline{\mathcal{F}}_0^W] + \int_0^T H_s dW_s. \qquad (16.18)$$

(T 可以为 $+\infty$)

Brown 运动的这种性质称为 **可料表示性**. 下面我们将用随机重积分的形式来表示指数鞅，并讨论 Brown 运动平方可积泛函空间的 Wiener 混沌 (chaos) 分解 (参看 Wiener[2] 和 Itô[4]).

定理 16.5 设 $M \in \mathfrak{M}_{loc}^c$, 则对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned} Z_t^\alpha &\equiv \exp\left\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}[M]_t\right\} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \alpha^n \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} dM_{t_1} dM_{t_2} \cdots dM_{t_n} \qquad \text{a.s..} \end{aligned} \qquad (16.19)$$

证 从上节定理 15.1 可知，$Z^\alpha \in \mathfrak{M}^c_{loc}$. 令

$$H_n(x,y) \equiv \frac{d^n}{d\alpha^n}\exp\left\{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}y\right\}\bigg|_{\alpha=0} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{16.20}$$

则 $H_n(x,y)$ 为关于 x 及 y 之多项式，且

$$\exp\left\{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}y\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}H_n(x,y). \tag{16.21}$$

对 (16.21) 两边微分 (对 x 二次，对 y 一次), 比较系数可得

$$\frac{\partial}{\partial x}H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y) \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n(x,y) = n(n-1)H_{n-2}(x,y) \qquad (n = 2,3,\cdots),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}H_n(x,y) = -\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x,y) \qquad (n = 2,3,\cdots),$$

由此可知

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)H_n(x,y) = 0 \qquad (n = 2,3,\cdots). \tag{16.22}$$

根据伊藤公式，对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned}H_n(M_t,[M]_t) &= H_n(0,0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}H_n(M_s,[M]_s)dM_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial y}H_n(M_s,[M]_s)d[M]_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_n(M_s,[M]_s)d[M]_s \\ &= n\int_0^t H_{n-1}(M_s,[M]_s)dM_s \qquad \text{a.s.}(n = 2,3,\cdots),\end{aligned} \tag{16.23}$$

因为当 $n \geq 2$ 时 $H_n(0,0) = 0$. 但 $H_0 \equiv 1$, $H_1(x,y) = x$, 对 n 进行归纳，可得随机重积分：

$$H_n(M_t,[M]_t) = n!\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2} dM_{t_1}dM_{t_2}\cdots dM_{t_n} \qquad \text{a.s.}$$
$$(n = 1,2,\cdots). \tag{16.24}$$

由于 $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t$, 每一步迭代都是有意义的，且 $H_n(M_t,[M]_t)$ 为连续局部鞅．代入 (16.21) 即得 (16.19). ∎

注意，多项式 $H_n(x,y)$ 和 Hermite 多项式：

$$h_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{16.25}$$

有如下关系：

$$\begin{cases} h_n(x) = H_n(x,1) \\ H_n(x,y) = y^{n/2} h_n(x/\sqrt{y}), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{16.26}$$

特别，$H_0(x,y) \equiv 1$, $H_1(x,y) = x$, $H_2(x,y) = x^2 - y$, $H_3(x,y) = x^3 - 3xy$, $H_4(x,y) = x^4 - 6x^2y + 3y^2, \cdots$ 这样，我们就构造了一系列的连续局部鞅：

$$\begin{aligned} &H_1(M_t,[M]_t) = M_t, \\ &H_2(M_t,[M]_t) = M_t^2 - [M]_t, \\ &H_3(M_t,[M]_t) = M_t^3 - 3M_t[M]_t, \\ &H_4(M_t,[M]_t) = M_t^4 - 6M_t^2[M]_t + 3[M]_t^2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

习题 3.7 利用 $H_4(M_t,[M]_t)$ 为连续局部鞅，证明不等式：

$$\mathbb{E}[M_t^4] \leq 36\mathbb{E}([M]_t^2). \tag{16.27}$$

特别，考虑区间 $[0,T]$ 上的一维 Brown 运动 W 及非随机函数 $f \in L^2[0,T]$. 在 (16.19) 中取 $M_t = \int_0^t f(s)dW_s$, $0 \leq t \leq T$, 则 M 为连续平方可积鞅，且 $[M]_t = \int_0^t f(s)^2 ds$. 取 $\alpha = 1$, 得

$$\begin{aligned} Z_t(f) &\equiv \exp\left\{ \int_0^t f(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \left(\int_0^{t_2} f(t_1)dW_{t_1} \right) f(t_2)dW_{t_2} \cdots f(t_n)dW_{t_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int_{0<t_1<\cdots<t_n<t} f(t_1)\cdots f(t_n)dW_{t_1}\cdots dW_{t_n} \qquad \text{a.s..} \end{aligned} \tag{16.28}$$

令 $\Delta_t^n \equiv \{(t_1,\cdots,t_n)\in \mathbb{R}_+^n;\ 0<t_1<\cdots<t_n<t\}$ 为 n 维单纯形， λ^n 为 n 维 Lebesgue 测度. 若 $\varphi_n\in L^2(\Delta_T^n,\lambda^n)$ $(n\in\mathbb{N})$, 对 $t\in[0,T]$ 定义：

$$J_t^n(\varphi_n)\equiv\int_0^t\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\varphi_n(t_1,\cdots,t_n)dW_{t_1}\cdots dW_{t_n}. \qquad (16.29)$$

由随机积分的等距性质容易验证：

$$\mathbb{E}[J_t^n(\varphi_n)J_t^m(\psi_m)]=\delta_{mn}\int_{\Delta_t^n}\varphi_n\psi_n d\lambda^n, \qquad 0\le t\le T$$

$$(\varphi_n,\psi_n\in L^2(\Delta_T^n,\lambda^n),n,m\in\mathbb{N}). \qquad (16.30)$$

于是 J_T^n 是由 $L^2(\Delta_T^n,\lambda^n)$ 到 $L^2(\Omega,\overline{\mathcal{F}}_T^W,P)$ 的一个闭子空间 G_n 的 Hilbert 同构映象，且当 $n\neq m$ 时， G_n 与 G_m 正交. 现在要证明：

定理 16.6 设 $T>0$, 则 Hibert 空间 $L^2(\Omega,\overline{\mathcal{F}}_T^W,P)$ 存在如下正交分解 (称为 Wiener **混沌分解**):

$$L^2(\Omega,\overline{\mathcal{F}}_T^W,P)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}G_n, \qquad (16.31)$$

其中 G_0 为常数所构成的子空间， $G_n=\mathrm{Rg}\ (J_T^n)$ 为由 (16.29) 所定义的映象 J_T^n 的值域.

特别 (16.28) 中的级数为 L^2 收敛，且 $\{Z_t(f),\ 0\le t\le T\}$ 及由 (16.29) 所定义的 $\{J_t^n(\varphi_n),\ 0\le t\le T\}$ $(n\in\mathbb{N},\ \varphi_n\in L^2(\Delta_T^n,\lambda^n))$ 均为平方可积鞅.

证 设 $\eta\in L^2(\Omega,\overline{\mathcal{F}}_T^W,P)$, 且 $\eta\perp G_n$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_0$ 成立. 在 (16.29) 中选取 φ_n 为适当的阶梯函数，可证对任意 n 及任意时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0,T]$ 有

$$\mathbb{E}[\eta|W_{t_1},\cdots,W_{t_n}]=0 \qquad \text{a.s.}, \qquad (16.32)$$

由于 η 为 $\overline{\mathcal{F}}_T^W$ 可测，故存在 Borel 可测函数 $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ 及 $\{t_n\} \subset [0,T]$ 使

$$\eta = f(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n}, \cdots) \qquad \text{a.s.},$$

在 (16.32) 中令 $n \longrightarrow \infty$, 由于左边为平方可积鞅，故收敛于 0, 因而

$$\eta = \mathbb{E}[\eta | W_{t_1}, \cdots, W_{t_n}, \cdots] = 0 \qquad \text{a.s.},$$

这就证明了 (16.31) 式. 其余结论都是明显的. ∎

注 1 上述结果对 $\forall T > 0$ 均成立，回忆 $\overline{\mathfrak{Z}}^W$ 平方可积鞅空间和 $L^2(\Omega, \overline{\mathcal{F}}_T^W, P)$ 的同构关系，我们重新得到了 Brown 运动的可料表示性.

注 2 如果定义 $\{L^2(\Delta_T^n, \lambda^n), n \in \mathbb{N}_0\}$ 的无穷直和:

$$\Gamma \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\Delta_T^n, \lambda^n), \tag{16.33}$$

其中适当定义内积, 由 (16.30) 可知 Γ 和 $L^2(\Omega, \overline{\mathcal{F}}_T^W, P)$ 同构. $L^2(\Delta_T^n, \lambda^n)$ 相当于 $L^2[0,T]$ 的 n 重对称张量积， Γ 称为 **对称 Fork 空间** (参看 Reed-Simon[1]).

习题 3.8 利用 (16.24),(16.26) 及 Hermite 多项式的正交性质证明:

$$\mathbb{E}[J_t^n(f^{\circ n}) J_t^m(f^{\circ m})] = \frac{\delta_{mn}}{n!}\left(\int_0^t f(s)^2 ds\right)^n, \tag{16.34}$$

其中 $f^{\circ n}(t_1, \cdots, t_n) \equiv f(t_1) \cdots f(t_n)$, 因而有

$$\|Z_t(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \exp\left\{\|f\|_{L^2[0,t]}^2\right\}. \tag{16.35}$$

(提示: $\int_0^t f(s) dW_s \sim N(0, \int_0^t f(s)^2 ds)$, 而 Hermite 多项式满足:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) h_m(x) e^{-x^2/2} dx = \delta_{mn} n!). \tag{16.36}$$

§17. 局部时和 Tanaka 公式

伊藤公式要求函数 $f \in C^2$. 但在许多应用问题中涉及的函数并不光滑. 例如考虑在原点具有反射壁的一维 Brown 运动 $|W| = \{|W_t|,\ t \in \mathbb{R}_+\}$, 或更一般地, 在 $a \in \mathbb{R}$ 处反射的 Brown 运动 $|W - a| + a$. 在随机控制问题中也常常考虑一些不光滑的函数. 人们自然会想到, 能否用广义导数的概念来推广伊藤公式? 这一节我们就来讨论这个问题. 和这问题密切相关的是 Lévy[1] 首先引进的局部时概念和 Tanaka 关于连续半鞅的局部时的 Tanaka 公式 (参看 Mckean[1,2]).

先回忆有关广义函数及广义导数的若干基本概念及基本性质. 为叙述简单起见, 只考虑一维情形, 详细讨论可参看 Schwartz[1].

设 $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的无穷次连续可微函数全体, 在其中由以下收敛性确定一个拓扑结构: $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ 意味着它们的支集含于某个公共的紧集 K 中, 且 φ_n 本身及其一切阶导数均在 K 上一致收敛于 φ 及其相应的各阶导数. 赋以此种拓扑结构后, 此线性拓扑空间记为 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. 其上一切连续线性泛函称为 **广义函数**, 广义函数全体记为 $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

对广义函数 $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$, 定义其 n 阶 **广义导数** 为

$$T^{(n)}(\varphi) \equiv (-1)^n T(\varphi^{(n)}), \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{17.1}$$

因此, 任一广义函数具有任意阶的广义导数.

下面是一些常见的广义函数:

例 3.2 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的 **局部可积函数**(即在任一有限区间为 Lebesgue 可积). 令

$$T_f(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)dx, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{17.2}$$

则 $T_f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. 因此, 每一局部可积函数可以看作一个广义函数.

例 3.3 设 μ 为 $\mathbb{R}$ 上的 **Radon 测度**(即在任一有界 Borel 集上取有限值的 σ- 可加集函数). 令

$$T_\mu(\psi) \equiv \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\mu(dx), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{17.3}$$

则 $T_\mu \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. 因此, 每一 Radon 测度可以看作一个广义函数. 特别, 集中于原点的单点测度, 其值为 1, 可以看作一个广义函数, 这就是 δ 函数 (即由 $\delta(\psi) = \psi(0)$ 所确定的广义函数).

从广义函数的观点看来, 我们将局部可积函数 f 等同于以它为密度的绝对连续的 Radon 测度.

例 3.4 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的 **有限变差函数**(即在任一有限区间上的变差为有界). 自然, f 局部可积, 此外, 还可由分部积分公式 (注意 ψ 具有紧支集, $\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x) = 0$) 计算其广义导数:

$$\begin{aligned} T_f'(\psi) &= -T_f(\psi') = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)df(x) \\ &= T_{df}(\psi), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

其中 df 为由 f 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度 (为 Radon 测度). 因此 $T_f' = T_{df}$.

从广义函数观点来看, 广义函数当且仅当它是有限变差函数时, 其一阶广义导数为 Radon 测度. 特别, 当且仅当它是增函数时, 其一阶广义导数为非负 Radon 测度.

例 3.5 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的 **凸函数**(即对 $x, y \in \mathbb{R}$ 及 $\lambda \in [0,1]$ 有: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$), 则 f 连续 (因而局部可积). 可以证明 (例如参看 Rockafellar[1]), 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 其左导数 $D^-f(x)$ 及右导数 $D^+f(x)$ 均存在, D^+f 为右连续增函数, D^-f 为左连续增函数, 除开一个可数集外有 $D^-f(x) = D^+f(x)$(即通常意义下的导数存在). 如果令 $f'(x) = \frac{1}{2}[D^-f(x) + D^+f(x)]$, 则 f' 为增函数, 且对任一区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$, 有:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx. \tag{17.4}$$

我们再利用分部积分公式来计算其二阶广义导数：

$$T_f''(\psi)=T_f(\psi'')=\int_{\mathbb{R}}f(x)\psi''(x)dx=-\int_{\mathbb{R}}f'(x)\psi'(x)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\psi(x)df'(x)=T_{df'}(\psi),\qquad \psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

其中 df' 为由增函数 f' 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度 (非负 Radon 测度). 因此 $T_f''=T_{df'}$.

从广义函数观点看来，广义函数当且仅当它是凸函数时，其二阶广义导数为非负 Radon 测度. 一般地，当且仅当它可表为两个凸函数之差时，其二阶广义导数为 Radon 测度.

例如： $f(x)=|x|$ 为一凸函数. 其一阶广义导数为

$$f'(x)=\operatorname{sgn}(x)\equiv\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\tag{17.5}$$

其二阶广义导数为由 sgn (x) 产生的 Lebesgue-Stielties 测度，即集中于原点的单点测度，其值为 sgn (x) 在 0 点的跃度 2, 即广义函数 2δ.

一般地，考虑凸函数 $f_a(x)=|x-a|$. 其一阶广义导数为 $\operatorname{sgn}(x-a)$, 二阶广义导数为 $2\delta_a$ (δ_a 为集中 a 点的单点测度，即由 $\delta_a(\psi)=\psi(a)$ 确定的广义函数).

对 Brown 运动 W, 形式地应用伊藤公式得

$$|W_t-a|=|W_0-a|+\int_0^t\operatorname{sgn}(W_s-a)dW_s+\int_0^t\delta_a(W_s)ds$$
$$\text{a.s.},\ t\in\mathbb{R}_+,\ a\in\mathbb{R}.\tag{17.6}$$

最后一项记为 $L(t,a)$, 可理解为

$$L(t,a)\equiv\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\mathbf{1}_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}(W_s)ds$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{1}{2\varepsilon}\lambda\{s\in[0,t];W_s\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\},\tag{17.7}$$

称为 Brown 运动 W 在 a 点的局部时, 即 Brown 运动轨道 t 时刻前在 a 点邻域消耗时间的密度. 为证明上述极限存在, 我们来研究一般连续半鞅的局部时.

定理 17.1 设 X 为一维连续半鞅, $X = X_0 + M + V$ 为其典型分解, f 为凸函数, $f' \equiv \frac{1}{2}(D^- f + D^+ f)$. 则 $f(X)$ 为连续半鞅, 且存在唯一连续增过程 U, 使对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + U_t \qquad \text{a.s..} \tag{17.8}$$

证 令 $\tau_n \equiv \inf\{t;\ |X_t| \geq n\}$. 若对停止过程 $X^{\tau_n}(n \in \mathbb{N})$ 证明了上述结论, 则结论对 X 也成立. 因此, 不妨设 X 有界.

令

$$\rho(x) \equiv \begin{cases} c\exp\{-(1-x^2)^{-1}\}, & 若\ |x| < 1, \\ 0, & 若\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

其中 c 为常数, 满足 $\int_{-1}^{+1} \rho(x)dx = 1$. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 令

$$\rho_n(x) \equiv n\rho(nx),$$

则 $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ 为非负偶函数, 其支集为 $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ 且 $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$. 再令

$$\begin{aligned} f_n(x) &\equiv (f * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_n(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_n(y)dy \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{17.9}$$

容易看出, f_n 为凸函数, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, 且当 $n \longrightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq \int_{[|y| \leq 1/n]} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy \\ &\leq \sup_{|y| \leq \frac{1}{n}} |f(x-y) - f(x)| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

于是 f_n 在有限区间一致收敛于 f. 对 (17.9) 进行微分，由于 f 只在可数个点上可能不存在导数，故

$$f_n'(x)=\int_{\mathbb{R}}f'(x-y)\rho_n(y)dy=\int_{\mathbb{R}}f'(y)\rho_n(x-y)dy,$$

因 f' 定义为左右导数平均值， ρ_n 为偶函数，易见 f_n' 点点收敛于 f'.

对函数 f_n 应用伊藤公式，对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$f_n(X_t)=f_n(X_0)+\int_0^t f_n'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)d[M]_s \quad \text{a.s.} \tag{17.10}$$

记右边最后一项为 $U_t^{(n)}$, 由 f_n 的凸性，$f_n''\geq 0$, 故 $U^{(n)}=\{U_t^{(n)},\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为连续增过程. 由假定 X 有界，而 f_n' 收敛于 f', 故 $\{f_n'(X)\}$ 一致有界. 由定理 11.10, 随机积分 $\int f_n'(X)\cdot dX$ 依概率在有限区间一致收敛于 $\int f'(X)\cdot dX$. 在 (17.10) 中令 $n\longrightarrow\infty$, 得证 $U^{(n)}$ 依概率在有限区间一致收敛于某个过程 U, 显然 U 为连续增过程. ∎

特别，对 $a\in\mathbb{R}$, 应用定理 17.1 于函数 $f_a(x)=|x-a|$, 并记其所确定的连续增过程为 $L^a=\{L_t^a,\ t\in\mathbb{R}_+\}$, 于是，对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$|X_t-a|=|X_0-a|+\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s-a)dX_s+L_t^a \ \text{ a.s.,} \tag{17.11}$$

这个公式称为 Tanaka公式.

定义 17.2 设 X 为一维连续半鞅， $a\in\mathbb{R}$. 则由 (17.11) 式所确定的连续增过程 L^a 称为 **半鞅 X 在 a 点的局部时**.

注意 $\operatorname{sgn}(X-a)=-\operatorname{sgn}(-X+a)$, $|X-a|=|-X+a|$. 故 X 在 a 点的局部时等于 $-X$ 在 $-a$ 点的局部时.

习题 3.9 设 X 为连续半鞅， L^a 为 X 在 a 点的局部时，则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$(X_t-a)^+=(X_0-a)^++\int_0^t \mathbf{1}_{(a,\infty)}(X_s)dX_s+\frac{1}{2}L_t^a \text{ a.s.} \tag{17.12}$$

及

$$(X_t-a)^-=(X_0-a)^- -\int_0^t 1_{(-\infty,a)}(X_s)dX_s+\frac{1}{2}L_t^a \text{ a.s.}. \quad (17.13)$$

(17.12) 和 (17.13) 都可用来作为局部时的定义.

注 从定理 17.1 的证明可知，局部时是 (17.10) 式中最后一个积分的极限. 如果 X 为有限变差过程，则 $[M]\equiv 0$, 因而局部时为 0.

定理 17.3 设 X 为一维连续半鞅，$a\in\mathbb{R}$, L^a 为 X 在 a 点的局部时. 则对几乎所有 ω, 由 $L_t^a(\omega)$ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度 $dL_t^a(\omega)$ 只在集合 $\{t;\ X_t(\omega)=a\}$ 上有负荷.

证 只需对每一 $T>0$, 证明 $dL_t^a(\omega)$ 在集合 $\{t\le T;\ X_t(\omega)\neq a\}$ 上无负荷. 设 σ,τ 为停时，且 $0\le\sigma\le\tau\le T$, $((\sigma,\tau))\subset\{(t,\omega);\ X(t,\omega)<a\}$. 由 L^a 及 X 的连续性，在 (17.12) 中分别以 τ 和 σ 代 t 然后相减得

$$(X_\tau-a)^+-(X_\sigma-a)^+=\int_\sigma^\tau 1_{(a,\infty)}(X_s)dX_s+\frac{1}{2}(L_\tau^a-L_\sigma^a) \text{ a.s.}.$$

因在 $[[\sigma,\tau]]$ 上有 $X\le a$, 故左边及右边第一项均为 0, 于是 $L_\tau^a=L_\sigma^a$.

对任一有理数 $r\in\mathbb{Q}\bigcap[0,T]$, 令 $\sigma_r\equiv r|_{[X_r<a]}$, $\tau_r\equiv\inf\{t>\sigma_r;\ X_t\ge a\}\bigwedge T$, 则 $((\sigma_r,\tau_r))\subset\{X<a\}$, 因为随机开集

$$\bigcup_{r\in Q\cap[0,T]}(\sigma_r,\tau_r)=\{t\le T;\ X(t,\omega)<a\},$$

故对 a.a.ω, $dL_t^a(\omega)$ 在 $\{t\le T;X(t,\omega)<a\}$ 上无负荷. 同理可证其在 $\{t\le T;X(t,\omega)>a\}$ 上无负荷. ∎

现在可将伊藤公式推广到凸函数.

定理 17.4 设 X 为一维连续半鞅，f 为两个凸函数之差，$f'=\frac{1}{2}(D^-f+D^+f)$, μ 为 f 之二阶广义导数 ($\mathbb{R}$ 上的 Radon 测度), 则

1° 存在 $\mathcal{P}\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测函数 $(\omega,t,a)\longmapsto L_t^a(\omega)$, 使对 $\forall a\in\mathbb{R}$, L^a 为 X 在 a 点局部时;

2° 对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a\mu(da) \text{ a.s.} \tag{17.14}$$

证 当 $f(x)=b+cx$ $(b,c\in\mathbb{R})$ 为线性函数时, 由伊藤公式, 此时 $\mu=0$, (17.14) 显然成立. 现假定 μ 为有界非负测度. 令

$$g(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|x-a|\mu(da),$$

则其二阶广义导数为

$$\begin{aligned}
T_g''(\psi)=T_g(\psi'')&=\int_{\mathbb{R}}g(x)\psi''(x)dx\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|x-a|\psi''(x)dx\Big)\mu(da)\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-a)\psi'(x)dx\Big)\mu(da)\\
&=\int_{\mathbb{R}}\psi(a)\mu(da)=T_\mu(\psi),\qquad \psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

于是 $f-g$ 之二阶导数为 0, f 和 g 只差一个线性函数. 根据上述理由, 我们不妨设

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|x-a|\mu(da), \tag{17.15}$$

此时有

$$f'(x)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x-a)\mu(da). \tag{17.16}$$

令

$$Z_t\equiv f(X_t)-f(X_0)\qquad (t\in\mathbb{R}_+),$$

$$Z_t^a\equiv|X_t-a|-|X_0-a|\qquad (a\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}_+).$$

由 X 连续，显然

$$(\omega, t, a) \longmapsto Z_t^a(\omega)$$

为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测，且由 (17.15) 有

$$Z_t = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} Z_t^a \mu(da), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{17.17}$$

令

$$H_t^a \equiv \operatorname{sgn}(X_t - a) \qquad (a \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+),$$

$$H_t^\mu \equiv \int_{\mathbb{R}} H_t^a \mu(da) \qquad (t \in \mathbb{R}_+),$$

显然

$$(\omega, t, a) \longmapsto H_t^a(\omega)$$

为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测, 且由 μ 有界得知 H^μ 为有界可料过程. 由 (17.16) 有

$$H_t^\mu = 2f'(X_t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+), \tag{17.18}$$

由定理 11.11, 有 $Y_t^a \equiv \int_0^t H_s^a \cdot dX_s (t \in \mathbb{R}_+)$ 使

$$(\omega, t, a) \longmapsto Y_t^a(\omega)$$

为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测，且

$$Y_t^\mu \equiv \int_{\mathbb{R}} Y_t^a \mu(da) = \int_0^t H_s^\mu \cdot dX_s, \qquad \text{a.s. } (t \in \mathbb{R}_+). \tag{17.19}$$

令 $L^a = Z^a - Y^a$ $(a \in \mathbb{R})$, 则按定义 L^a 为 X 在 a 点的局部时，且

$$(\omega, t, a) \longmapsto L_t^a(\omega)$$

为 $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可测. 由 (17.17),(17.18) 及 (17.19), 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_{\mathbb{R}} L_t^a \mu(da) = \int_{\mathbb{R}} Z_t^a \mu(da) - \int_{\mathbb{R}} Y_t^a \mu(da) = 2Z_t - Y_t^\mu$$

$$= 2f(X_t) - 2f(X_0) - 2\int_0^t f'(X_s)dX_s \qquad \text{a.s.},$$

此即 (17.14) 式.

对于一般的凸函数 f 及 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} f(n) + D^+ f(n)(x-n), & 若\ x > n, \\ f(x), & 若\ -n \le x \le n, \\ f(-n) + D^- f(-n)(x+n), & 若\ x < -n, \end{cases}$$

则 f_n 为凸函数, 其二阶广义导数为 $\mu_n(da) = 1_{[-n,n]}(a)\mu(da)$, 是非负有界测度. 令

$$\tau_n \equiv \inf\{t;\ |X_t| \ge n\},$$

则在 $[[0,\tau_n))$ 上有 $f_n(X) = f(X)$. 此外由定理 17.3, 当 $a \bar{\in} [-n,n]$ 时 $L^a_{\tau_n} = 0$, 因此当 $t \le \tau_n$ 时有

$$\int_{\mathbb{R}} L^a_t \mu_n(da) = \int_{\mathbb{R}} L^a_t \mu(da),$$

可见 (17.14) 式在每一区间 $[[0,\tau_n))$ 均成立, 既然 $\tau_n \uparrow \infty$ a.s., 故定理得证. ∎

推论 设 $M \in \mathfrak{M}^c_{loc}$, L^a 为其在 a 点局部时, g 为有界 Borel 函数, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_{\mathbb{R}} L^a_t g(a) da = \int_0^t g(M_s) d[M]_s \qquad \text{a.s.}. \tag{17.20}$$

证 将 (17.14) 与伊藤公式比较, 可知当凸函数 $f \in C^2$ 时有

$$\int_{\mathbb{R}} L^a_t f''(a) da = \int_0^t f''(M_s) d[M]_s \qquad \text{a.s.}, \tag{17.21}$$

此式对一切非负连续函数 f'' 均成立, 由单调类定理可证对一切有界 Borel 函数 g 也成立. ∎

特别, 取 g 为 Borel 集 B 的示性函数, 得

$$\int_B L^a_t da = \int_0^t 1_B(M_s) d[M]_s \qquad \text{a.s.}. \tag{17.22}$$

在 Brown 运动的情形下，$[W]_t = t$, 右边表示 Brown 运动的轨道在集合 B 中所消耗的时间，而 L_t^a 则是其在 a 点邻域中消耗时间的密度，这也是局部时名称的来由.

Brown 运动的局部时有许多有趣的性质，特别是证明了它关于 (t,a) 二元连续，且 $\{L(t,a),\ a \in \mathbb{R}\}$ 为一马氏过程 (以空间参数 a 代替时间参数). 详细研究可参看 Itô-Mckean[1], 应用局部时研究具有反射壁的 Brown 运动可参看 Chung-Williams[1].

此外，(17.6) 式表明：下鞅 $|W_t - a|$ 分解为鞅 $|W_0 - a| + \int_0^t \text{sgn}\,(W_s - a)dW_s$ 和连续增过程 L_t^a 之和，这是 Doob-Meyer 分解的一个特殊情形，因此局部时也可定义为下鞅 $|W_t - a|$ 分解中所确定的唯一连续增过程. 而鞅

$$M_t \equiv \int_0^t \text{sgn}(W_s - a)dW_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

由于

$$[M]_t = \int_0^t (\text{sgn}(W_s - a))^2 ds = \int_0^t ds = t,$$

根据定理 13.8, 它也是一个 Brown 运动. 这种现象在讨论随机微分方程弱解时 (第四章) 我们还要进一步研究.

第四章 随机微分方程和扩散过程

§18. 伊藤随机微分方程的解

Wiener 过程只是对真实的 Brown 运动的理想化描述，尽管它和实验相符，但和牛顿力学却相距甚远．为了从牛顿力学来解释 Brown 运动，1908 年 Langevin[1] 提出了一个随机微分方程．1930 年 Uhlenbeck-Ornstein[1] 系统地发展了这个 Brown 运动的动力学理论．

以 X_t 表示作 Brown 运动的粒子在时刻 t 的速度，m 为其质量．根据牛顿力学定律，得到如下方程：

$$dX_t = -\beta X_t dt + \sigma dW_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{18.1}$$

右边第一项为液体介质黏滞作用产生的阻力，按 Stokes 定律，$\beta = 6\pi r\eta/m$，其中 r 为粒子半径，η 为黏滞系数；第二项为周围液体分子碰撞作用力，根据统计力学中能量均分原则，扩散系数 $\sigma = \sqrt{2\beta KT/m}$，其中 K 为 Boltzmann 常数，T 为绝对温度，而 W 则是 Wiener 过程．这个方程称为 **Langevin 方程**，它的解称为 **Ornstein-Uhlenbeck 速度过程**，对它的积分就得到 **Ornstein-Uhlenbeck 位置过程**，代表作 Brown 运动的粒子在 t 时刻的位置．若初始速度为 x_0，将 (18.1) 写成积分方程形式就是

$$X_t = x_0 - \int_0^t \beta X_s ds + \int_0^t \sigma dW_s. \tag{18.1$'$}$$

在扩散系数 σ 和漂移系数 $-\beta X_t$ 均依赖于粒子速度及时间时，就得到一般的伊藤随机积分方程：

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X)ds + \int_0^t \sigma(s, X)dW_s, \tag{18.2}$$

其中 b 和 σ 为 $\mathbb{R}_+\times C(\mathbb{R}_+)$ 上的函数，为使右边两个积分有意义，必须 $\sigma(s,X(\cdot,\omega))\in\mathcal{L}^2_{loc}$，且 $b(s,X(\cdot,\omega))\in\mathcal{L}^1_{loc}$。因此，作为轨道空间 $C(\mathbb{R}_+)$ 上的泛函，对 $\forall s\in\mathbb{R}_+$，我们要求 $b(s,\cdot)$ 和 $\sigma(s,\cdot)$ 只依赖于 s 时刻以前的轨道。其中最重要的特殊情形是所谓 Markov 型，即只依赖于 s 时刻轨道的值。在这种情形下，b 和 σ 可以看成 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ 上的 Borel 可测函数：$b=b(s,x)$，$\sigma=\sigma(s,x)$，$s\in\mathbb{R}_+$，$x\in\mathbb{R}$。而方程 (18.2) 具有以下形式：

$$X_t=X_0+\int_0^t b(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s, \tag{18.3}$$

或写成随机微分方程形式：

$$dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t. \tag{18.3$'$}$$

其初值 X_0 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量。本书将着重讨论 **Markov 型的伊藤随机微分方程**。特别，当 b 和 σ 不依赖于 s，只是 x 的函数时，这种方程称为 **时齐的**。如果 $\sigma\equiv 0$，(18.3$'$) 就成了通常的常微分方程 (只有初值 X_0 可能是随机的)，因而伊藤随机方程可以看成常微分方程的推广，它是普通的常微分方程加上一个随机波动项。

下面，我们将给出方程 (18.3) 的解的定义。

很长一段时期，人们混淆了两种不同的解的概念：在经典的伊藤理论中，讨论的是所谓 **强解**。即概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上的 Brown 运动 W 已经给定，已知两个 Borel 可测函数 b 和 σ，要构造一个连续、$\overline{\mathfrak{F}}^W$ (由 W 产生的自然 σ- 代数流) 适应过程 X，使对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，(18.3) a.s. 成立。所谓解的唯一性是指 **轨道唯一性**，即若 X 和 $\widetilde{X}$ 同时为 (18.3) 的解，则它们无区别。从 20 世纪 60 年代起，有些作者 (例如 Skorohod[1], Stroock 和 Varadhan[1], Krylov[1] 等) 讨论了所谓 **弱解**。即仅仅已知函数 b 和 σ，要构造概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数流 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F}$ Brown 运动 W 及 $\mathfrak{F}$ 适应连续过程 X，使对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$，(18.3) a.s. 成立。所谓唯一性是指 **分布唯一性**，即若 X

和 $\tilde{X}$ 同时为 (18.3) 的解 (可能在不同的概率空间上), 则它们的有限维分布相同.

为说明两种解的概念不同，我们举一个简单的例子:

例 4.1 (Tanaka) 考虑方程:

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)dW_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{18.4}$$

显然，满足 (18.4) 的过程 X 是连续局部鞅，其平方变差过程为

$$[X]_t = \int_0^t (\mathrm{sgn}(X_s))^2 ds = \int_0^t ds = t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

因而由定理 13.8, X 为一 Brown 运动. 这说明方程 (18.4) 的解具有分布唯一性. 然而若 X 为解，至少 $-X$ 也是解，这说明方程 (18.4) 不具有轨道唯一性. 为了构造一个弱解，只要任取一个概率空间及其上的任一 Brown 运动作为 X, 然后令

$$\widetilde{W}_t \equiv \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s) \cdot dX_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

和上面一样的道理， $\widetilde{W}$ 也是 Brown 运动，且对 $t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)d\widetilde{W}_s = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\mathrm{sgn}(X_s)dX_s = X_t \qquad \text{a.s.},$$

即过程 X 和 $\widetilde{W}$ 满足方程 (18.4), 因此弱解存在.

注意上述过程是先构造解过程 X, 再构造 Brown 运动 $\widetilde{W}$, 因而 $\widetilde{W}$ 是 $\mathfrak{F}^X$ 适应过程, 但 X 却不可能是 $\mathfrak{F}^{\widetilde{W}}$ 适应过程. 如果事先已经在某个概率空间上给定了一个 Brown 运动 W, 而 X 是方程 (18.4) 的一个强解, 则 X 必为 $\mathfrak{F}^W$ 适应过程. 由上面推理，X 必须是 $\mathfrak{F}^W$ Brown 运动.

设 L_t 为 X 在 0 点的局部时. 由 Tanaka 公式 (17.11) 得

$$\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)dX_s = |X_t| - L_t \qquad \text{a.s. } (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

由假定 X 是 (18.4) 的解，上式左边等于

$$\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\operatorname{sgn}(X_s)dW_s = W_t.$$

根据 (17.7) 式可知

$$L_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(|X_s|)ds$$

为 $\overline{\mathcal{F}}_t^{|X|}$ 可测，因而 W_t 为 $\overline{\mathcal{F}}_t^{|X|}$ 可测，由此推出

$$\overline{\mathcal{F}}_t^X \subset \overline{\mathcal{F}}_t^W \subset \mathcal{F}_t^{|X|}.$$

但这是不可能的．这一矛盾说明方程 (18.4) 不存在强解．

如果在应用问题中只涉及解的分布，例如确定某些与解过程有关的事件的概率，计算某些与解过程有关的变量的数学期望，研究其不变测度的存在性和不同过程的分布相互绝对连续性，以及偏微分方程解的概率表示等，只要构造弱解就行了．但另一些应用问题必须涉及解的轨道，例如建立两个方程的解之间的比较定理，在随机系统的控制问题中根据观察到的过程轨道而采取不同的控制手段，在随机系统的滤波问题中构造所谓新息过程 (即构造一个过程 $\widetilde{W}$, 使 $\overline{\mathfrak{F}}^{\widetilde{W}} = \overline{\mathfrak{F}}^X$), 解决这些问题必须研究强解．所谓强解，实质上就是把解看成已知的 Brown 运动轨道的泛函．为此，我们可以把 Wiener 空间 $(\mathcal{W},\mathcal{B},\mu)$ (参看引论部分) 作为基本概率空间．而在研究弱解时，为研究其分布，则必须考虑解过程的轨道空间．

本章中我们将以 $\mathcal{W}^d \equiv C(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d)$ 表示定义在 $\mathbb{R}_+$ 上，取值于 $\mathbb{R}^d$ 中的连续函数全体所构成的 Fréchet 空间，其中准范数定义为

$$\|w\|_{\mathcal{W}^d} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\sup_{0\le t\le n}|w(t)|\wedge 1), \qquad w\in\mathcal{W}^d,$$

$\mathcal{B}(\mathcal{W}^d)$ 为其中 Borel 子集 σ- 代数，对 $t \in \mathbb{R}_+$, 以 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^d) \equiv \sigma\{w(s), 0 \le s \le t\}$ 表示使一切映象:

$$\mathcal{W}^d \ni w \longmapsto w(s) \in \mathbb{R}^d, \qquad s \in [0,t]$$

为可测的最小 σ- 代数.

再以 $\mathcal{W}_0^d$ 表示 $\mathcal{W}^d$ 中满足 $w(0)=0$ 的函数构成的子空间， μ 为其上 Wiener 测度，即 d 维 Brown 运动的分布. 令 $\overline{\mathcal{B}}_t \equiv \overline{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^d)}^{\mu}$ 表示 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}_0^d)$ 关于 μ 的完备化. 显然 $(\mathcal{W}_0^d, \overline{\mathcal{B}}_\infty, \mu)$ 为一完备概率空间，其中 "坐标函数":

$$\mathcal{W}_0^d \ni w \longmapsto w(t) \in \mathbb{R}^d, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \tag{18.5}$$

构成此概率空间上的 Brown 运动过程，且由定理 1.8, $\overline{\mathbb{B}} = \{\overline{\mathcal{B}}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为连续的 σ- 代数流，满足通常条件.

在方程 (18.3) 中，若 X 为 m 维过程，W 为 d 维 Brown 运动，则 $b(s,x)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的函数， $\sigma(s,x)$ 为 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 的函数，即矩阵值函数. 在空间 $\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 中，我们采用 Hilbert-Schmidt 范数，即若 $\sigma = (\sigma_j^i)_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$, 则

$$\|\sigma\|^2 = \mathrm{tr}\sigma\sigma^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^d (\sigma_j^i)^2. \tag{18.6}$$

对于非时齐的方程，我们总可以用增添一个分量 $X_t^{m+1} = t$ 的办法化为时齐的方程 (当然这种简化有一定代价，常常使条件加强). 不失一般性，我们还可以假定初值 $X_0 = x \in \mathbb{R}^m$ 为一常向量 (否则可以考虑关于 $\mathcal{F}_0$ 的条件概率分布 $P_\omega = p(\omega, \cdot)$, 当以 P_ω 代替 P 时，每一 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量以概率 1 为常数. 参看附录 B 定理 B.5 推论 2). 作了上述简化处理后，我们在本章中总是考虑以下形式的 Markov 型伊藤方程:

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b^i(X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j^i(X_s)dW_s^j$$
$$(t \in \mathbb{R}_+;\ i = 1,2,\cdots,m). \tag{18.7}$$

写成向量形式就是

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)\cdot dW_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

或写成微分形式

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)\cdot dW_t, \qquad t > 0 \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{18.7'}$$

下面给出方程 (18.7) 的解的定义：

定义 18.1 设 $b: \ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 及 $\sigma: \ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 为 Borel 可测函数， $x \in \mathbb{R}^m$. 若存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 及 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动 W, m 维连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程 X, 满足：

1° $b(X) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, $\sigma(X) \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$;

2° 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, (18.7) 式 a.s. 成立.

则过程 X(或过程 X 和 W 一起) 称为方程 (18.7) 的一个 **弱解**, 或简称为 **解**.

定义 18.2 若方程 (18.7) 具有以下性质：只要 (X, W) 和 $(\widetilde{X}, \widetilde{W})$ 都是方程 (18.7) 具有相同初值的解 (不必定义在同一概率空间上), X 和 $\widetilde{X}$ 就具有相同的分布. 则称此方程的解具有 **分布唯一性**；若方程 (18.7) 具有以下性质：只要 (X, W) 和 $(\widetilde{X}, W)$ 都是定义在同一概率空间上具有相同初值的解， X 就和 $\widetilde{X}$ 无区别. 则称此方程的解具有 **轨道唯一性**.

再给出强解的定义：

定义 18.3 设 (X, W) 是方程 (18.7) 的一个解. 若存在函数 $\Phi: \ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}_0^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 满足：

1° Φ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \overline{\mathcal{B}}_\infty / \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测；

2° $x \in \mathbb{R}^m$, $\omega \in \mathcal{W}_0^d \Longrightarrow \Phi(x, \cdot, \omega) \in \mathcal{W}^m$;

3° $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \Phi(x, t, \cdot)$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测，使得对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$X(t, \omega) = \Phi(X_0, t, W_\cdot(\omega)) \qquad \text{a.s.}, \tag{18.8}$$

则过程 X(或过程 X 和 W) 称为方程 (18.7) 的一个 **强解**.

若存在上述函数 Φ, 满足:

1° 对任意 $x \in \mathbb{R}^m$ 及任意 d 维 Brown 运动 $W, X(t,\omega) \equiv \Phi(x,t,W.(\omega))$ 为方程 (18.7) 的一个解;

2° 对方程 (18.7) 的任一个解 $(\widetilde{X},\widetilde{W})$ 及 $t\in \mathbb{R}_+$, 有

$$\widetilde{X}(t,\omega) = \Phi(\widetilde{X}_0, t, \widetilde{W}.(\omega)) \qquad \text{a.s.},$$

则称方程 (18.7)**有唯一强解**.

粗略地说, 若 (X,W) 是解, 且 X 为 $\widetilde{\mathfrak{F}}^W$ 适应过程, 就称 X 为强解. 显然, 当方程 (18.7) 有唯一强解, 则其解具有轨道唯一性和分布唯一性, 此时不妨取基本概率空间为 $(\mathcal{W}_0^d,\ \overline{\mathcal{B}}_\infty,\ \mu)$, 而对任意初值 x, 上述函数 $\Phi(x,\cdot,\cdot)$ 就是这个基本概率空间上的 m 维连续 $\overline{\mathbb{B}}$ 适应过程, 它和 "坐标函数"(18.5) 一道, 满足方程 (18.7). 也就是说, 若记 $X(t,w)\equiv\Phi(x,t,w)$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)\cdot dw(s) \qquad \text{a.s. } (\mathcal{W}_0^d,\ \mu). \quad (18.9)$$

因此, 当方程 (18.7) 存在唯一强解时, 此强解是 Brown 运动轨道的泛函. 下面关于存在唯一强解的准则是随机微分方程理论的一个基本结果:

定理 18.4 方程 (18.7) 有唯一强解的必要充分条件是: 对 $\forall x\in \mathbb{R}^m$, 存在一个弱解且具有轨道唯一性.

证 必要性显然, 往证充分性. 设 (X,W) 和 (X',W') 为方程 (18.7) 的具有相同初值 $x\in\mathbb{R}^m$ 的两个解 (不必定义在相同的概率空间上). 它们在 $\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}_0^d$ 中的分布分别为 P_x 及 P'_x. 以 π 表示由 $\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}_0^d$ 到 $\mathcal{W}_0^d$ 的投影, 则 P_x 及 P'_x 在 $\mathcal{W}_0^d$ 中有相同的边沿分布: $P_x\circ\pi^{-1} = P'_x\circ\pi^{-1}=\mu$ (Wiener 测度).

对 $\forall t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, 令 $Q_{x,t}(w,\cdot)$ 表示 X 关于 W 的正则条件分布 (更精确地说, 是关于 (X_0,W) 的条件分布, 其中 $X_0 = x$ a.s., 参看

附录 B), 且各自考虑到 t 时刻为止的轨道 (即分别局限于 σ- 代数 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 及 $\overline{\mathcal{B}}_t$). 则对 $\forall t\in\overline{\mathbb{R}}_+$ 有

(i) 对 $\forall x\in\mathbb{R}^m$, $\forall w\in\mathcal{W}_0^d$, $Q_{x,t}(w,\cdot)$ 为 $(\mathcal{W}^m,\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m))$ 上的概率测度;

(ii) 对 $\forall B\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, $Q_{\cdot,t}(\cdot,B)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\overline{\mathcal{B}}_t$ 可测函数;

(iii) 对 $\forall B\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 及 $A\in\overline{\mathcal{B}}_t$, $x\in\mathbb{R}^m$ 有:

$$P_x(B\times A)=\int_A Q_{x,t}(w,B)\mu(dw). \tag{18.10}$$

我们进一步可以证明 (18.10) 对一切 $A\in\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 都成立, 因而根据条件分布的性质, 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$ 和 $B\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, 有 $Q_{x,\infty}(w,B)=Q_{x,t}(w,B)$ a.s. $[\mu]$, 故 $Q_{x,\infty}(\cdot,B)$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_t$ 可测函数.

事实上, 若记 $(\rho_t w)(s)\equiv w(t\wedge s)$, $(\theta_t w)(s)\equiv w(t+s)-w(t)$, 则 $\rho_t:\ \mathcal{W}_0^d\longrightarrow\mathcal{W}_0^d$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_t/\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 可测; 对一切 $s\geq 0$, $(\theta_t w)(s)$ 与 $\overline{\mathcal{B}}_t$ 独立 (关于概率 μ). 将 $A\in\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 写成如下形状:

$$A=\{w;\ \rho_t w\in A_1,\ \theta_t w\in A_2\},\qquad A_1,A_2\in\overline{\mathcal{B}}_\infty,$$

则有

$$\begin{aligned}
&\int_A Q_{x,t}(w,B)\mu(dw)\\
&=\mu[\theta_t w\in A_2]\int_{[\rho_t w\in A_1]}Q_{x,t}(w,B)\mu(dw)\\
&=P_x(\mathcal{W}^m\times[\theta_t w\in A_2])P_x(B\times[\rho_t w\in A_1])\\
&=P(X.\in B,W(t\wedge\cdot)\in A_1,W(t+\cdot)-W(t)\in A_2)\\
&=P(X.\in B,W.\in A)\\
&=P_x(B\times A),
\end{aligned}$$

因此 (18.10) 对 $A\in\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 成立.

令 $\Omega\equiv\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}^m\times\mathcal{W}_0^d$. 同样地定义 $Q'_{x,t}(w,\cdot)$, 令

$$Q_x(dw_1,dw_2,dw)\equiv Q_{x,\infty}(w,dw_1)Q'_{x,\infty}(w,dw_2)\mu(dw);$$

$\mathcal{F} \equiv \overline{\mathcal{B}(\Omega)}^{Q_x}$, 即 Ω 之 Borel 子集 σ - 代数关于 Q_x 的完备化；
$\mathcal{F}_t^0 \equiv \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m) \times \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m) \times \overline{\mathcal{B}}_t$, 加入 Q_x 零集并右连续化后记为 $\mathcal{F}_t$, 则 $(\Omega, \mathcal{F}, Q_x)$ 为一概率空间, $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为其子 σ- 代数流. 在此空间上, (w_1, w) 及 (w_2, w) 分别具有和 (X, W) 及 (X', W') 相同的分布.

我们还可以证明 $\{w(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, Q_x)$ 上的 $\mathfrak{F}$ Brown 运动. 事实上, 只要证明对 $s < t, w(t) - w(s)$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立 (关于 Q_x). 设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_s(\mathcal{W}^m)$, $A \in \overline{\mathcal{B}}_s$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, 则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^Q[\mathbf{1}_{B_1 \times B_2 \times A} \exp\{i(\lambda, w(t) - w(s))\}] \\ &= \int_A \exp\{i(\lambda, w(t) - w(s))\} Q_{x,\infty}(w, B_1) Q'_{x,\infty}(w, B_2) \mu(dw),\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}^Q$ 表示对 Q_x 的积分. 因为 $Q_{x,\infty}(\cdot, B_1)$ 及 $Q'_{x,\infty}(\cdot, B_2)$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_s$ 可测, 而 $w(t) - w(s)$ 与 $\overline{\mathcal{B}}_s$ 独立, 所以上式等于:

$$\begin{aligned}&\exp\{-(|\lambda|^2/2)(t-s)\} \int_A Q_{x,\infty}(w, B_1) Q'_{x,\infty}(w, B_2) \mu(dw) \\ &= \exp\{-(|\lambda|^2/2)(t-s)\} Q_x(B_1 \times B_2 \times A),\end{aligned}$$

得证 $w(t) - w(s)$ 与 $\mathcal{F}_s$ 独立.

既然 (w_1, w) 和 (w_2, w) 是在同一概率空间上的两个解, 由假定的轨道唯一性可知 $w_1 = w_2$ a.s. $[Q_x]$, 此即

$$(Q_{x,\infty}(w, \cdot) \times Q'_{x,\infty}(w, \cdot))(w_1 = w_2) = 1, \qquad \text{a.s. } [\mu].$$

容易看出, 乘积测度若集中在 "对角线" 上, 必然集中于某个单点 $\psi(x, w) \in \mathcal{W}^m$, 即

$$Q_{x,\infty}(w, \cdot) = Q'_{x,\infty}(w, \cdot) = \delta_{\psi(x,w)}, \qquad \text{a.s. } [\mu]. \tag{18.11}$$

于是对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{cases} X_t(\omega) = \psi_t(x, W_\cdot(\omega)), & \text{a.s. } [P] \\ X'_t(\omega') = \psi_t(x, W'_\cdot(\omega')), & \text{a.s. } [P'] \end{cases} \tag{18.12}$$

令 $\Phi(x,t,w)\equiv\psi_t(x,w)$, 则 Φ 关于 t 连续, 关于 (x,w) 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 可测 (由 (18.11) 及 $Q_{x,\infty}$ 及 $Q'_{x,\infty}$ 的性质 (ii)), 因而关于 (x,t,w) 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\overline{\mathcal{B}}_\infty$ 可测. 又因为对 $\forall B\in\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, $Q_{x,\infty}(\cdot,B)$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_t$ 可测, 亦即

$$\delta_{\psi(x,w)}(B)=\mathbf{1}_{\psi(x,\cdot)^{-1}B}(w)$$

为 $\overline{\mathcal{B}}_t$ 可测; 于是对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$,

$$\psi(x,\cdot):\qquad \mathcal{W}_0^d\longrightarrow\mathcal{W}^m$$

为 $\overline{\mathcal{B}}_t/\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 可测; 当然 $\Phi(x,t,\cdot)=\psi_t(x,\cdot)$ 为 $\overline{\mathcal{B}}_t/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测. 注意到 (18.12), 可见方程 (18.7) 有唯一强解. ∎

由定理可知, 若方程 (18.7) 的解具有轨道唯一性, 则也具有分布唯一性. 关于强解的详细讨论, 可参看 Zvonkin-Krylov[1] 或 Ikeda-Watanabe[1]. 下一节将给出存在唯一强解的充分条件.

§19. 强解的存在性及唯一性

本节仍然考虑伊藤方程 (18.7), 并给出存在唯一强解的充分条件. 结果是经典的 (例如参看 Gihman-Skorohod[1]).

定义 19.1 函数 $b:\ \mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 及 $\sigma:\ \mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$, 若存在常数 $K>0$, 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\|\sigma(x)-\sigma(y)\|^2+|b(x)-b(y)|^2\le K|x-y|^2,\qquad(19.1)$$

则称为满足 **Lipschitz 条件**; 若对 $\forall R>0$, $\exists K_R>0$, 对一切满足 $|x|\le R$, $|y|\le R$ 的 $x,y\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\|\sigma(x)-\sigma(y)\|^2+|b(x)-b(y)|^2\le K_R|x-y|^2,\qquad(19.2)$$

则称为满足**局部 Lipschitz 条件**; 若存在常数 $K>0$, 对 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 有

$$\|\sigma(x)\|^2+|b(x)|^2\le K(1+|x|^2),\qquad(19.3)$$

则称为满足**线性增长条件**.

显然，若 $b \in C^1(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m), \sigma \in C^1(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$，则满足局部 Lipschitz 条件；若 b 和 σ 的所有一阶偏导数有界，则满足 Lipschitz 条件；若 b 和 σ 满足 Lipschitz 条件，则必然满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件. 下面是一个经常要用到的引理：

引理 19.2 (Gronwall-Bellman) 设 $T>0$，实函数 $g \geq 0$ 及 h 于 $[0,T]$ Lebesgue 可积. 若存在常数 $K>0$，对 $\forall t \in [0,T]$ 有

$$g(t) \leq h(t) + K\int_0^t g(s)ds, \tag{19.4}$$

则对 $\forall t \in [0,T]$ 有

$$g(t) \leq h(t) + K\int_0^t e^{K(t-s)}h(s)ds. \tag{19.5}$$

证 令 (19.5) 右边为 $f(t)$，则函数 f 满足方程：

$$f(t) = h(t) + K\int_0^t f(s)ds,\ f(0) = h(0). \tag{19.6}$$

令 $\Delta(t) \equiv f(t) - g(t)$，则由 (19.6) 及 (19.4) 得

$$\begin{aligned}
&\Delta(t) \geq K\int_0^t \Delta(s)ds \geq K^2\int_0^t\int_0^s \Delta(u)duds \\
&= K^2\int_0^t (t-s)\Delta(s)ds \geq K^3\int_0^t (t-s)\Big(\int_0^s \Delta(u)du\Big)ds \\
&= K^3\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\Delta(s)ds \geq \cdots \\
&\geq K^n\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\Delta(s)ds \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty), \qquad 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

因此 $\Delta(t) \geq 0$，即 (19.5) 成立. ∎

定理 19.3 设伊藤方程 (18.7) 的系数 b 和 σ 满足 Lipschitz 条件，则此方程有唯一强解.

证 根据定理 18.4, 只须证明方程 (18.7) 存在一个解且具有轨道唯一性. 我们先证轨道唯一性.

设 X 和 $\widetilde{X}$ 是定义在同一概率空间上具有相同初值 x, 关于同一 Brown 运动 W 的两个解. 令

$$\tau_n \equiv \inf\{t; |X_t| \geq n\},\ \widetilde{\tau_n} \equiv \inf\{t;\ |\widetilde{X}_t| \geq n\},$$

为证 X 和 $\widetilde{X}$ 无区别, 只须证明对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $\tau_n = \widetilde{\tau_n}$ a.s., 且停止过程 X^{τ_n} 和 $\widetilde{X}^{\tau_n}$ 无区别. 由 X 及 $\widetilde{X}$ 轨道连续性, 又只须证明对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\mathbb{E}[|X_{t\wedge\tau_n\wedge\widetilde{\tau_n}} - \widetilde{X}_{t\wedge\tau_n\wedge\widetilde{\tau_n}}|^2] = 0,$$

因此, 不妨设 X 及 $\widetilde{X}$ 本身有界, 且局限于有限区间 $[0,T]$.

因对 $\forall t \in [0,T]$ 有

$$X_t - \widetilde{X}_t = \int_0^t (b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds + \int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s)) \cdot dW_s \quad \text{a.s.},$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds\right|^2 \\ + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s)) \cdot dW_s\right|^2.\end{aligned} \tag{19.7}$$

由 Schwarz 不等式有

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t (b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds\right|^2 \leq T\int_0^t \mathbb{E}|b(X_s) - b(\widetilde{X}_s)|^2 ds, \tag{19.8}$$

再由 (12.33) 式得

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s)) \cdot dW_s\right|^2 = \int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s)\|^2 ds, \tag{19.9}$$

利用 Lipschitz 条件 (19.1) 可得估计式

$$\mathbb{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 \leq 2K(1+T)\int_0^t \mathbb{E}|X_s - \widetilde{X}_s|^2 ds, \tag{19.10}$$

由 Gronwall-Bellman 引理立即得到

$$\mathbb{E}|X_t - \widetilde{X}_t|^2 \equiv 0 \qquad (0 \leq t \leq T),$$

因而 X 与 $\widetilde{X}$ 无区别，得证轨道唯一性.

下面用逐次逼近法来构造一个解.

取基本概率空间 $(\mathcal{W}_0^d, \overline{\mathcal{B}}_\infty, \mu)$ 及 σ- 代数流 $\overline{\mathfrak{B}} = \{\mathcal{B}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$. 此时坐标函数 (18.5) 为 $\overline{\mathfrak{B}}$ Brown 运动. 令 $X^{(0)} \equiv x \in \mathbb{R}^m$, 对 $n \geq 1$, 归纳地定义 $X^{(n)} = X^{(n)}(x,t,w)$ 如下：

$$X_t^{(n)} \equiv x + \int_0^t b(X_s^{(n-1)})ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(n-1)}) \cdot dw(s). \tag{19.11}$$

在任一有限区间 $[0,T]$ 中，应用线性增长性质 (19.3)(它可由 Lipschitz 条件推出) 及不等式： $|x+y+z|^2 \leq 3(|x|^2+|y|^2+|z|^2)$ 可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t^{(n)}|^2 &\leq 3|x|^2 + 3TK\int_0^t (1+\mathbb{E}|X_s^{(n-1)}|^2)ds \\
&\quad + 3K\int_0^t (1+\mathbb{E}|X_s^{(n-1)}|^2)ds \\
&\leq 3|x|^2 + 3KT(T+1)(1+\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(n-1)}|^2),
\end{aligned}$$

于是

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(n)}|^2 \leq 3|x|^2 + 3KT(T+1)(1+\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t^{(n-1)}|^2).$$

由于 $\mathbb{E}|X_t^{(0)}|^2 \equiv |x|^2 < \infty$, 故对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 上式为有限，再根据 (19.3) 知 $\sigma(X^{(n)}) \in \mathcal{H}_{loc}^2(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, 因此 (19.11) 的每一步迭代均有意

义，且 $X^{(n)}$ 为连续 $\overline{\mathbb{B}}$ 适应过程. 在 (19.10) 的证明中，以 $X^{(n-1)}$ 代 X, 以 $X^{(n)}$ 代 $\widetilde{X}$, 即知存在常数 $c>0$, 使对 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,T]$ 有

$$\mathbb{E}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2\le c\int_0^t \mathbb{E}|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^2ds.$$

当 $n=1$ 时，显然有 $\mathbb{E}|X_t^{(1)}-X_t^{(0)}|^2\le a$(常数), 经过迭代，容易得到估计式

$$\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2\le a(cT)^n/n!. \tag{19.12}$$

因

$$\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|\le\int_0^T|b(X_s^{(n)})-b(X_s^{(n-1)})|ds$$
$$+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t(\sigma(X_s^{(n)})-\sigma(X_s^{(n-1)}))\cdot dW_s\right|\qquad \text{a.s.,}$$

根据 Lipschitz 条件，并利用 (19.12) 及 (12.36) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2\Big]\\
&\le 2TK\int_0^T\mathbb{E}|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^2ds\\
&\quad+8K\int_0^T\mathbb{E}|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^2ds\\
&\le(2T+8)TK\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}|X_t^{(n)}-X_t^{(n-1)}|^2\\
&\le(2T+8)TKa(cT)^{n-1}/(n-1)!\\
&=a_1(cT)^{n-1}/(n-1)!,
\end{aligned}\tag{19.13}$$

其中 $a_1=(2T+8)TKa$. 由 Chebyshev 不等式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|>2^{-n}\}\le 4a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4cT)^{n-1}}{(n-1)!}<\infty,$$

根据 Borel-Cantelli 引理

$$\mu\{\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|>2^{-n}\text{ i.o.}\}=0,$$

即对 a.a. w, $\exists n_0=n_0(w)$, 当 $n\ge n_0$ 时有

$$\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}(w)-X_t^{(n)}(w)|\le 2^{-n}.$$

由 Weierstrass 判别法，对 a.a. w, 下面的级数：

$$X^{(n)}(w)=x+\sum_{k=1}^{n}(X_t^{(k)}(w)-X_t^{(k-1)}(w))$$

对 $t\in[0,T]$ 一致收敛于某个连续 $\overline{\mathfrak{B}}$ 适应过程 X. 因对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 当 $n\longrightarrow\infty$ 时有

$$\left|\int_0^t b(X_s^{(n)})ds-\int_0^t b(X_s)ds\right|\le K\int_0^t|X_s^{(n)}-X_s|ds\longrightarrow 0\ \text{ a.s.}$$

及

$$\int_0^t\|\sigma(X_s^{(n)})-\sigma(X_s)\|^2ds\le K\int_0^t|X_s^{(n)}-X_s|^2ds\longrightarrow 0\ \text{ a.s.},$$

由定理 12.12 知 $\int_0^t\sigma(X_s^{(n)})\cdot dw(s)$ 依概率在有限区间一致收敛于 $\int_0^t\sigma(X_s)\cdot dw(s)$, 在 (19.11) 中取极限即得

$$X_t=x+\int_0^t b(X_s)ds+\int_0^t\sigma(X_s)\cdot dw(s)\qquad\text{a.s.},$$

因此 $X=X(x,t,w)$ 为方程 (18.7) 的一个解. ∎

值得注意的是，选取概率空间 $(\mathcal{W}_0^d,\ \overline{\mathcal{B}}_\infty,\mu,\ \overline{\mathfrak{B}})$ 及 Brown 运动 $\{w(t),\ t\in\mathbb{R}_+\}$, 我们直接得到了强解定义 18.3 中的函数 Φ. 从证明过程中还可以看出，利用停止过程，只须假定系数 b 和 σ 满足

局部 Lipschitz 条件 (19.2), 但在构造解的过程中, 为了保证解在整个 R_+ 上存在 (不出现 "爆发" (explosion) 现象), 还必须假定线性增长条件 (19.3) 满足. 于是我们有以下的推广:

定理 19.4 设伊藤方程 (18.7) 的系数 b 和 σ 满足局部 Lipschitz 条件 (19.2) 及线性增长条件 (19.3), 则此方程有唯一强解.

当 $m = d = 1$ 时, Yamada 和 Watanabe[1] 得到了一个比 Lipschitz 条件更弱的轨道唯一性条件:

定理 19.5 设 $m = d = 1$, $\sigma(x)$ 和 $b(x)$ 有界, 且满足以下条件:

1° 存在 R_+ 上严格增函数 ρ, 满足 $\rho(0) = 0$ 及 $\int_{0+} \rho^{-2}(u)du = \infty$, 使对 $\forall x, y \in R$ 有

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x - y|); \tag{19.14}$$

2° 存在 R_+ 上增凹函数 γ, 满足 $\gamma(0) = 0$ 及 $\int_{0+} \gamma^{-1}(u)du = \infty$, 使对 $\forall x, y \in R$ 有

$$|b(x) - b(y)| \leq \gamma(|x - y|); \tag{19.15}$$

则伊藤方程 (18.7) 的解具有轨道唯一性.

注 下节我们将证明, 在所给条件下存在弱解, 因而由定理 18.4, 此时方程有唯一强解. 特别, 取 $\rho(u) = Ku^{\alpha}\left(\alpha \geq \frac{1}{2}\right)$ 及 $\gamma(u) = Ku^{\alpha}(\alpha \geq 1)$, 我们有以下结论: 若 σ 为指数 1/2 Hölder 连续, b 为 Lipschitz 连续, 则方程 (18.7) 的解具有轨道唯一性.

证 令 $a_0 = 1$, $a_n \downarrow\downarrow 0$, 且使

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho^{-2}(u)du = n, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$\left(\text{由于 } \int_{0+} \rho^{-2}(u)du = \infty, \text{ 这是办得到的}\right)$. 选取连续函数序列 $\{\psi_n(u)\}$ 使 ψ_n 的支集含于 (a_n, a_{n-1}) 中, 且对一切 n 及 u 有

$$0 \leq \psi_n(u) \leq 2\rho^{-2}(u)/n \qquad \text{及} \qquad \int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(u)du = 1$$

$\left(由于 \int_{a_n}^{a_{n-1}} 2\rho^{-2}(u)n^{-1}du = 2, 这种函数是存在的 \right)$. 令

$$\varphi_n(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_n(u)du, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

则 $\varphi_n \in C^2(\mathbb{R})$, $|\varphi_n'(x)| \le 1$, 且由于 $|x| \ge \varphi_n(x) \ge |x| - a_{n-1}$ 可知当 $n \longrightarrow \infty$ 时有 $\varphi_n(x) \uparrow |x|$.

设 X 和 $\widetilde{X}$ 为定义在同一概率空间具有相同初值 x 且关于同一 Brown 运动 W 的两个解, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$X_t - \widetilde{X}_t = \int_0^t (b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds + \int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s))dW_s \quad \text{a.s..}$$

由伊藤公式, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 及 $t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned}\varphi_n(X_t - \widetilde{X}_t) &= \int_0^t \varphi_n'(X_s - \widetilde{X}_s)(b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds \\ &+ \int_0^t \varphi_n'(X_s - \widetilde{X}_s)(\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s))dW_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_n''(X_s - \widetilde{X}_s)(\sigma(X_s) - \sigma(\widetilde{X}_s))^2 ds \qquad \text{a.s.,}\end{aligned}$$

由于上式第二项期望为 0, 而由 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_0^t \varphi_n'(X_s - \widetilde{X}_s)(b(X_s) - b(\widetilde{X}_s))ds\Big] \\ &\le \int_0^t \mathbb{E}[|b(X_s) - b(\widetilde{X}_s)|]ds \\ &\le \int_0^t \mathbb{E}[\gamma(|X_s - \widetilde{X}_s|)]ds \\ &\le \int_0^t \gamma(\mathbb{E}[|X_s - \widetilde{X}_s|])ds,\end{aligned}$$

又因 $\varphi_n''(u)=\psi_n(|u|)\le 2\rho^{-2}(|u|)/n$, 故

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\int_0^t \varphi_n''(X_s-\widetilde{X}_s)(\sigma(X_s)-\sigma(\widetilde{X}_s))^2ds\Big]\\&\le\int_0^t \mathbb{E}\Big[\frac{2}{n}\rho^{-2}(|X_s-\widetilde{X}_s|)\rho^2(|X_s-\widetilde{X}_s|)\Big]ds\\&=2t/n\longrightarrow 0\qquad (n\longrightarrow\infty),\end{aligned}$$

所以当 $n\longrightarrow\infty$ 时，(注意此时 $\varphi_n(x)\uparrow|x|$) 有

$$\mathbb{E}[|X_t-\widetilde{X}_t|]\le\int_0^t\gamma(\mathbb{E}[|X_s-\widetilde{X}_s|])ds. \tag{19.16}$$

由于 $\int_{0+}\gamma^{-1}(u)du=\infty$, 根据常微分方程理论中熟知的结论，方程 $y'=\gamma(y)$, $y(0)=0$ 有唯一解 $y\equiv 0$. 令 (19.16) 式右边为 $v(t)$, 则 $\mathbb{E}[|X_t-\widetilde{X}_t|]\le v(t)$, 且 $v'(t)=\gamma(\mathbb{E}[|X_t-\widetilde{X}_t|])\le\gamma(v(t))$ $(\forall t\ge 0)$ (注意函数 $t\longmapsto\mathbb{E}[|X_t-\widetilde{X}_t|]$ 为连续), 因 $v(0)=0$, 根据比较定理, $v(t)\le y(t)\equiv 0$, 因而

$$\mathbb{E}[|X_t-\widetilde{X}_t|]\equiv 0,\qquad \forall t\ge 0,$$

即 X 和 $\widetilde{X}$ 无区别.

习题 4.1 考虑非时齐伊藤方程:

$$\begin{cases} dX_t=b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)\cdot dW_t, & 0\le t\le T,\\ X_0=x\in\mathbb{R}^m,\end{cases}\tag{19.17}$$

其中 $b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m,\sigma:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$ 为 Borel 可测，满足局部 Lipschitz 条件：对 $\forall R>0,\exists K_R>0$ 使对 $\forall t\in[0,T],|x|\le R,|y|\le R$ 有

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|^2+|b(t,x)-b(t,y)|^2\le K_R|x-y| \tag{19.18}$$

及线性增长条件： $\exists K>0$, 对 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 及 $\forall t\in[0,T]$ 有

$$\|\sigma(t,x)\|^2+|b(t,x)|^2\le K(1+|x|^2). \tag{19.19}$$

证明方程 (19.17) 有唯一强解.

注 如果我们以 C_α 表示指数 α Hölder 连续函数类 $(0<\alpha\le 1)$, 以 C_ρ 表示满足条件 (19.14) 的函数类, 则 $C_{1/2}\subset C_\rho\subset\bigcup_{\alpha<1/2}C_\alpha$. 例如函数: $c\sqrt{u}$, $c\sqrt{u|\log u|}$, $c\sqrt{u|\log u|}\cdot\sqrt{|\log|\log u||}$ 等等均属于 C_ρ.

例 4.2 设 $f\in L^2[0,T]$, 考虑一维伊藤方程:

$$dX_t=f(t)X_t\cdot dW_t,\quad X_o=x\in\mathbb{R},\quad 0\le t\le T, \tag{19.20}$$

这里 $b\equiv 0$, $\sigma(t,x)=f(t)x$. 若 f 在 $[0,T]$ 有界可测, 则满足条件 (19.18) 和 (19.19), 因而有唯一强解. 然而在 §15 我们已经知道, 指数鞅

$$X_t=x\exp\left\{\int_0^t f(s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2ds\right\},\qquad 0\le t\le T$$

满足上述方程.

例 4.3 考虑一维伊藤方程:

$$\begin{cases} dX_t=-\frac{1}{2}\exp\{-2X_t\}dt+\exp\{-X_t\}dW_t, & t\in\mathbb{R}_+,\\ X_0=a\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{19.21}$$

这里 $b(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$, $\sigma(x)=e^{-x}$ 虽然满足局部 Lipschitz 条件 (19.2), 当 $x<0$ 时却不满足线性增长条件 (19.3). 但若令

$$\zeta(\omega)\equiv\inf\{t;\ W_t(\omega)=-e^a\} \tag{19.22}$$

及

$$X_t(\omega)=\log(W_t(\omega)+e^a)\qquad 0\le t<\zeta(\omega), \tag{19.23}$$

则可由伊藤公式直接验证:

$$X_{t\wedge\zeta}=a-\int_0^{t\wedge\zeta}\frac{1}{2}\exp\{-2X_s\}ds+\int_0^{t\wedge\zeta}\exp\{-X_s\}dW_s$$
$$\text{a.s.},\ t\in\mathbb{R}_+,$$

此时 ζ 为"爆发"时刻.

§20. 鞅问题和弱解的存在性

这一节我们主要依据 Stroock 和 Varadhan[1] 所提出的鞅问题来研究伊藤方程的弱解. 并且考虑更一般形式的方程:

$$dX_t = b(t,X)dt + \sigma(t,X)\cdot dW_t, \qquad t\in \mathbb{R}_+, \tag{20.1}$$

其中 $b:\mathbb{R}_+\times\mathcal{W}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m, \sigma:\mathbb{R}_+\times\mathcal{W}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$ 均为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ 可测, 且对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$, 作为 $\mathcal{W}^m$ 的函数为 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 可测.

若存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 及其上 m 维连续适应过程 X, d 维 Brown 运动 W, 使 $b(t,X.(\omega))\in\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m), \sigma(t,X.(\omega))\in\mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d)$, 且对 $\forall t\in\mathbb{R}_+$ 有

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s,X)\cdot dW_s \qquad \text{a.s.}, \tag{20.2}$$

则称 X 和 W 为方程 (20.1) 具有初值 X_0(为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量) 的一个弱解 (或简称为解).

令 $a\equiv\sigma\sigma^*$, 即对 $i,j=1,2,\cdots,m, t\in\mathbb{R}_+, w\in\mathcal{W}^m$,

$$a^{ij}(t,w)\equiv\sum_{k=1}^d \sigma^i_k(t,w)\sigma^j_k(t,w), \tag{20.3}$$

对 $f\in C^2_b(\mathbb{R}^m)$, 令

$$(Lf)(t,w)\equiv\sum_{i=1}^m b^i(t,w)\partial_i f(w(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(t,w)\partial_i\partial_j f(w(t))$$
$$t\in\mathbb{R}_+, \qquad w\in\mathcal{W}^m. \tag{20.4}$$

以下定理表明: 方程 (20.1) 的弱解的存在性和一个所谓鞅问题的解的存在性是等价的.

定理 20.1 方程 (20.1) 存在弱解等价于：存在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$，及其上 m 维连续适应过程 X，使对一切 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$

$$M_t^f \equiv f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(s, X)ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (20.5)$$

为连续局部鞅.

或者等价于：在空间 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上存在概率测度 P，使对一切 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$，关于概率 P

$$N_t^f \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t (Lf)(s, w)ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (20.6)$$

为连续 $(\mathcal{B}_{t+}(\mathcal{W}^m))$ 局部鞅. 其中 σ- 代数流 $\{\mathcal{B}_{t+}(\mathcal{W}^m),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为 $\{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 的右连续化.

证 设 X 和 W 为方程 (20.1) 的一个弱解. 由伊藤公式，对 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$，$t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(X_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \partial_i f(X_s) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \int_0^t \partial_i \partial_j f(X_s) d[M^i, M^j]_s \qquad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

其中 $M_t = \int_0^t \sigma(s, X) \cdot dW_s$. 由于 (参看 (12.28) 式)

$$[M^i, M^j] = \int_0^t a^{ij}(s, X)ds \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m) \quad \text{a.s.},$$

故

$$\begin{aligned} M_t^f &= f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Lf)(s, X)ds \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_k^i(s, X) \partial_i f(X_s) dW_s^k \qquad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

因此 $\{M_t^f,\ t\in \mathbb{R}_+\}$ 为连续局部鞅.

反之, 若存在连续适应过程 X, 使对 $\forall f\in C_b^2(\mathbb{R}^m), M^f$ 为连续局部鞅. 对 $n\in \mathbb{N}$, 令 $\tau_n\equiv \inf\{t;\ |X_t|>n\}$. 对 $i=1,2,\cdots,m$, 选择 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 使得当 $|x|\le n$ 时有 $f(x)=x^i$ (第 i 坐标), 于是

$$M_n^i(t)\equiv X_{\tau_n\wedge t}^i - X_0^i - \int_0^{\tau_n\wedge t} b^i(s,X)ds \in \mathfrak{M}_c^2.$$

因为 $\tau_n\uparrow\infty$ a.s., 故

$$M^i(t)\equiv X_t^i - X_0^i - \int_0^t b^i(s,X)ds\in \mathfrak{M}_{loc}^c,$$
$$i=1,2,\cdots,m. \tag{20.7}$$

类似地, 对 $i,j=1,2,\cdots,m$, 选择 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 使得当 $|x|\le n$ 时有 $f(x)=x^ix^j$, 可得

$$X_t^iX_t^j - X_0^iX_0^j - \int_0^t b^i(s,X)X_s^jds - \int_0^t b^j(s,X)X_s^ids$$
$$-\int_0^t a^{ij}(s,X)ds\in \mathfrak{M}_{loc}^c,\qquad i,j=1,2,\cdots,m,$$

由 (20.7) 及半鞅的分部积分公式 (13.13) 并利用定理 12.5 可得

$$[M^i,M^j]_t=\int_0^t a^{ij}(s,X)ds \qquad \text{a.s.},\ t\in \mathbb{R}_+,$$
$$i,j=1,2,\cdots,m. \tag{20.8}$$

由定理 16.3, 存在 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 的一个拓广 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P},\tilde{\mathfrak{F}})$ 以及其上的 d 维 $\tilde{\mathfrak{F}}$ Brown 运动 W, 使

$$M_t=\int_0^t \sigma(s,X)\cdot dW_s \qquad \text{a.s.},\qquad t\in \mathbb{R}_+,$$

于是由 (20.7)

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X)ds + \int_0^t \sigma(s,X)\cdot dW_s$$
$$\text{a.s.}, \qquad t\in \mathbb{R}_+,$$

即 X 和 W 为方程 (20.1) 的一个弱解.

又若存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 及其上连续适应过程 X, 使对 $\forall f\in C_b^2(\mathbb{R}^m), M^f$ 为连续 $\mathfrak{F}$ 局部鞅. 考虑映象 $X.:\Omega\longrightarrow \mathcal{W}^m$ 及 X 在 $(\mathcal{W}^m,\mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的分布 $\widehat{\mu}_X\equiv P\circ X_\cdot^{-1}$, 则由 (20.6) 所定义的 N^f 关于概率 $\widehat{\mu}_X$ 为连续 $(\mathcal{B}_{t+}(\mathcal{W}^m))$ 局部鞅. 因此后一等价性是明显的. ∎

在上述问题的提法中, 只涉及过程 X, 并不需要构造 Brown 运动; 且在 (20.5) 或 (20.6) 中也不出现随机积分, 因而通过极限运算比较容易. 这是 Stroock-Varadhan 方法的一个显著优点. 下面就利用这种方法, 在相当一般的假设下来构造方程 (20.1) 的弱解. 为此, 要先证明两个引理:

引理 20.2 设 $\{X^{(n)}\}$ 为 m 维连续过程序列, 满足以下条件:

1° $\lim_{c\to\infty}\sup_n P\{|X_0^{(n)}|>c\}=0;$ (20.9)

2° 对一切 $T>0$ 及 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_n P\{\sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ |t-s|\le h}}|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|>\varepsilon\}=0. \tag{20.10}$$

若记 $X^{(n)}$ 之分布 $\widehat{\mu}_{X^{(n)}}$ 为 P_n, 则 $\{P_n\}$ 胎紧 (参看附录 C).

证 由 Ascoli-Arzelà 定理, 集合 $A\subset\mathcal{W}^m$ 为相对紧的充分必要条件是:

(a) 一致有界, 即对一切 $T>0$ 有

$$\sup_{w\in A}\sup_{0\le t\le T}|w(t)|<\infty;$$

(b) 等度连续, 即对一切 $T>0$ 有

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{w\in A}V_h^T(w)=0,$$

其中

$$V_h^T(w) \equiv \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\|t-s|\le h}} |w(t)-w(s)|.$$

由条件 1°, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists c>0$ 使对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$P_n\{w;\ |w(0)|\le c\}>1-\varepsilon/2;$$

由条件 2°, 对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $k\in\mathbb{N}$, $\exists h_k>0$ 满足 $h_k\downarrow 0$, 且对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$P_n\{w; V_{h_k}^k(w)>1/k\}\le\varepsilon/2^{k+1}.$$

于是

$$P_n\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}[w; V_{h_k}^k(w)\le 1/k]\right\}>1-\varepsilon/2.$$

令

$$K_\varepsilon\equiv\{w;|w(0)|\le c\}\cap\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}[w;V_{h_k}^k(w)\le 1/k]\right\},$$

则 K_ε 满足条件 (a) 和 (b), 因而为 W^m 中的紧集, 且

$$\inf_n P_n(K_\varepsilon)\ge 1-\varepsilon,$$

由定义 C.3, $\{P_n\}$ 为胎紧. ∎

引理 20.3 设 $\{X^{(n)}\}$ 为 m 维连续过程序列, 满足以下条件

(i) $\exists\gamma>0$, $c_0>0$ 使 $\sup_n \mathbb{E}[|X_0^{(n)}|^\gamma]\le c_0$;

(ii) $\exists\alpha>0,\beta>0$ 及 $c_k>0(k\in\mathbb{N})$ 使对于一切 $s,t\in[0,k]$ 有

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|^\alpha]\le c_k|t-s|^{1+\beta}, \tag{20.11}$$

则 $\{X^{(n)}\}$ 满足引理 20.2 之条件 1° 及 2°, 因而其分布 $\{P_n\}$ 胎紧.

证 由 Chebyshev 不等式

$$\sup_n P\{|X_0^{(n)}|>c\}\le c^{-\gamma}\sup_n\mathbb{E}[|X_0^{(n)}|^\gamma]\le c_0c^{-\gamma},$$

故 1° 满足；为证 2°, 不妨取 T 为整数，令 $Y = X^{(n)}$. 由 (ii), 对 $s,t \in [0,T]$ 有

$$\mathbb{E}[|Y_t - Y_s|^{\alpha}] \le c_T|t-s|^{1+\beta},$$

由 Chebyshev 不等式，对 $0 < \eta < \beta/\alpha$ 有

$$\begin{aligned}
&P\{\max_{1\le i\le 2^nT}|Y_{i2^{-n}} - Y_{(i-1)2^{-n}}| > 2^{-n\eta}\} \\
&\le \sum_{i=1}^{2^nT} P\{|Y_{i2^{-n}} - Y_{(i-1)2^{-n}}| > 2^{-n\eta}\} \\
&\le 2^nTc_T2^{n\eta\alpha}2^{-n(1+\beta)} = c_TT2^{-n(\beta-\eta\alpha)}.
\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 选取 $j = j(\varepsilon,\delta)$ 使 $(1+2/(2^{\eta}-1))2^{-j\eta} \le \varepsilon$ 以及

$$\begin{aligned}
&P\Big[\bigcup_{n=j}^{\infty}\{\max_{1\le i\le 2^nT}|Y_{i2^{-n}} - Y_{(i-1)2^{-n}}| > 2^{-n\eta}\}\Big] \\
&\le c_TT\sum_{n=j}^{\infty}2^{-n(\beta-\eta\alpha)} < \delta,
\end{aligned}$$

记上式左边事件为 Ω_j, 则 $P(\Omega_j) < \delta$, 且当 $\omega \overline{\in} \Omega_j$ 时对 $\forall n \ge j$ 及 $i = 1,2,\cdots,[2^nT]$ 有

$$|Y_{i2^{-n}} - Y_{(i-1)2^{-n}}| \le 2^{-n\eta}. \tag{20.12}$$

设 D_T 为 $[0,T]$ 中二进位有理数全体，若 $s \in D_T$ 且 $i2^{-j} \le s < (i+1)2^{-j}$, 则 $s = i2^{-j} + \sum_{l=1}^{p}\varepsilon_l2^{-j-l}$, 其中 $\varepsilon_l = 0$ 或 1. 因此，当 $\omega \overline{\in} \Omega_j$ 时有

$$\begin{aligned}
|Y_s - Y_{i2^{-j}}| &\le \sum_{k=1}^{p}\Big|Y\Big(i2^{-j} + \textstyle\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l2^{-j-l}\Big) \\
&- Y\Big(i2^{-j} + \textstyle\sum_{l=1}^{k-1}\varepsilon_l2^{-j-l}\Big)\Big| \le \displaystyle\sum_{k=1}^{p}2^{-(j+k)\eta} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}2^{-(j+k)\eta} = 2^{-j\eta}(2^{\eta}-1)^{-1},
\end{aligned} \tag{20.13}$$

若 $t\in D_T$, 且 $(i-1)2^{-j}\le t< i2^{-j}$, 则由 (20.12) 及 (20.13) 有

$$\begin{aligned}|Y_t-Y_s|&\le|Y_s-Y_{i2^{-j}}|+|Y_t-Y_{(i-1)2^{-j}}|+|Y_{i2^{-j}}-Y_{(i-1)2^{-j}}|\\&\le(1+2(2^\eta-1)^{-1})2^{-j\eta}\le\varepsilon,\end{aligned}$$

若 s,t 同属于某区间 $[i2^{-j},\ (i+1)2^{-j})$, 当然更有上述估计. 因 D_T 在 $[0,T]$ 中稠密, 故对 $\forall\omega\in\Omega_j$ 及 $\forall s,t\in[0,T]$, 只要 $|s-t|\le 2^{-j}$, 就有

$$|Y_t-Y_s|\le\varepsilon,$$

于是

$$P\{\sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\|t-s|\le 2^{-j}}}|Y_t-Y_s|>\varepsilon\}\le P(\Omega_j)<\delta.$$

回忆 $Y=X^{(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$ 而 $j=j(\varepsilon,\delta)$ 显然与 n 无关, 得证 2°.

下面是本节主要定理:

定理 20.4 设方程 (20.1) 的系数 b 和 σ 在 $\mathbb{R}_+\times W^m$ 上有界连续, 则弱解存在.

证 对 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$\begin{aligned}b_n(t,w)\equiv b(k2^{-n},w),\qquad &\sigma_n(t,w)\equiv\sigma(k2^{-n},w)\\&(k2^{-n}\le t<(k+1)2^{-n},\ k=0,1,\cdots).\end{aligned}$$

任取一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathfrak{F})$ 及其上 d 维 $\mathfrak{F}$ Brown 运动 W, 对 $x\in\mathbb{R}^m$, $n\in\mathbb{N}$, 归纳地定义一个 m 维连续过程 $X^{(n)}$ 如下:

令: $X_0^{(n)}=x$; 若对 $t\le k2^{-n}$ 已定义了 $X_t^{(n)}$, 则对 $t\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n})$ 定义:

$$\begin{aligned}X_t^{(n)}\equiv\ &X_{k2^{-n}}^{(n)}+b(k2^{-n},\ X_{k2^{-n}\wedge\cdot}^{(n)})(t-k2^{-n})\\&+\sigma(k2^{-n},X_{k2^{-n}\wedge\cdot}^{(n)})(W_t-W_{k2^{-n}})\qquad(k=0,1,\cdots).\end{aligned}$$

显然 $X^{(n)}$ 为以下方程之唯一解:

$$\begin{cases}dX_t^{(n)}=b_n(t,X^{(n)})dt+\sigma_n(t,X^{(n)})\cdot dW_t, & t\in\mathbb{R}_+\\X_0^{(n)}=x\in\mathbb{R}^m.\end{cases}\tag{20.14}$$

因系数 b 和 σ 有界，故存在常数 $c>0$, 使

$$\|\sigma_n(t,w)\|^2+|b_n(t,w)|\le c.$$

由于对 $T>0$ 及 $s,t\in[0,T]$ 有

$$X_t^{(n)}-X_s^{(n)}=\int_s^t b_n(u,X^{(n)})du+\int_s^t \sigma_n(u,X^{(n)})\cdot dW_u \quad \text{a.s.},$$

故对一切 n 有

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|^4]\le 8\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t b_n(u,X^{(n)})du\right|^4\right]$$
$$+8\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t \sigma_n(u,X^{(n)})\cdot dW_u\right|^4\right].$$

根据定理 13.13, 可知存在仅依赖于 c 和 T(与 n 无关) 的常数 c_1,c_2 和 c_T, 使

$$\mathbb{E}[|X_t^{(n)}-X_s^{(n)}|^4]\le c_1|t-s|^2+c_2\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \|\sigma_n(u,X^{(n)})\|^2du\right)^2\right]$$
$$\le c_T|t-s|^2, \tag{20.15}$$

注意到 $X_0^{(n)}=x\in\mathbb{R}^m$, 由引理 20.3(取 $\alpha=4$, $\beta=1$), $\{X^{(n)}\}$ 之分布 $\{P_n\}$ 为胎紧. 由定理 C.4, 存在子序列 $\{P_{n_k}\}$ 弱收敛于 $(\mathcal{W}^m,\mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的某个概率测度 Q. 再由定理 C.6, 存在概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 及其上的 m 维连续过程 $\widetilde{X}$ 及 $\{\widetilde{X}^{(k)}\}$, 使 $\widetilde{X}^{(k)}$ 之分布为 P_{n_k} $(k\in\mathbb{N})$, $\widetilde{X}$ 之分布为 Q, 且当 $k\longrightarrow\infty$ 时, $\widetilde{X}^{(k)}$ 以概率 1 在有限区间一致收敛于 $\widetilde{X}$.

令 $\widetilde{\mathcal{F}}_t\equiv\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma\{\widetilde{X}_s,\ s\le t+\varepsilon\}$ $(t\in\mathbb{R}_+)$. 在 (20.4) 中分别以 σ_{n_k} 和 b_{n_k} 代替 σ 和 b 可定义算子 $L^{(k)}$. 由于 $\widetilde{X}^{(k)}$ 和 $X^{(n_k)}$ 同分布，而后者为 (20.14) 当 $n=n_k$ 时之解，因而由定理 20.1, 对 $\forall f\in C_b^2(\mathbb{R}^m)$

$$f(\widetilde{X}_t^{(k)})-f(\widetilde{X}_0^{(k)})-\int_0^t (L^{(k)}f)(s,\widetilde{X}^{(k)})ds, \qquad t\in\mathbb{R}_+$$

为连续 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 局部鞅 ($\widetilde{\mathfrak{F}} = \{\widetilde{\mathcal{F}}_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$; 这里实际上是鞅). 因此, 对 $s < t$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 及一切有界连续、$\mathcal{B}_s(\mathcal{W}^m)$ 可测函数 φ 有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\Big(f(\widetilde{X}_t) - f(\widetilde{X}_s) - \int_s^t (Lf)(u, \widetilde{X})du\Big)\varphi(\widetilde{X})\Big] \\
&= \lim_{k\to\infty} \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\Big(f(\widetilde{X}_t^{(k)}) - f(\widetilde{X}_s^{(k)}) - \int_s^t (L^{(k)}f)(u, \widetilde{X}^{(k)})du\Big) \\
&\quad \cdot \varphi(\widetilde{X}^{(k)})\Big] = 0,
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mathbb{E}}$ 表示对 $\widetilde{P}$ 的积分. 于是

$$f(\widetilde{X}_t) - f(\widetilde{X}_0) - \int_0^t (Lf)(u, \widetilde{X})du, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

为连续 $\widetilde{\mathfrak{F}}$ 鞅. 根据定理 20.1, $\widetilde{X}$ 为方程 (20.1) 的一个弱解.

注意在定理中关于 σ 和 b 的有界性假定可以减弱, 但必须对其增长的阶加以限制, 以保证不出现 "爆发" 现象 (参看 Stroock-Varadhan[1]). 我们将在下两节对时齐 Markov 型伊藤方程 (18.7) 研究其弱解的存在性和分布唯一性.

§21. L 扩散过程

现在回到时齐 Markov 型的伊藤方程:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)\cdot dW_t, & t \in \mathbb{R}_+ \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{21.1}$$

并假定 $b: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \sigma: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 为连续函数. 设 $a(x) \equiv \sigma(x)\sigma(x)^*$, 且对 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, 令

$$(Lf)(x) \equiv \sum_{i=1}^m b^i(x)\partial_i f(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)\partial_i\partial_j f(x). \tag{21.2}$$

对于这类方程弱解的存在性，我们有以下简单的结果：

定理 21.1 设方程 (21.1) 的系数 b 和 σ 连续，且满足线性增长条件 (19.3)，则对任一初值 $x \in \mathbb{R}^m$，方程 (21.1) 存在弱解.

先证明有关解的矩的几个不等式.

引理 21.2 在条件 (19.3) 下，若 X 为方程 (21.1) 的解，则对 $\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall T > 0$，存在只依赖于 n, K, T 的常数 c_1 和 c_2，使

$$\mathbb{E}[|X_t|^{2n}] \le (1+|x|^{2n})e^{c_1 t} \qquad (0 \le t \le T), \tag{21.3}$$

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2n}] \le c_2(1+|x|^{2n})(t-s)^n e^{c_1 t} \quad (0 \le s,\ t \le T). \tag{21.4}$$

证 令 $\tau_k \equiv \inf\{t;\ |X_t| \ge k\}$ $(k \in \mathbb{N})$，若对一切停止过程 X^{τ_k} 证明了上述不等式，令 $k \longrightarrow \infty$，由 Fatou 引理，则不等式对 X 也成立，故不妨设 X 有界.

由伊藤公式，对 $t \in [0,T]$ 有

$$\begin{aligned}|X_t|^{2n} &= |x|^{2n} + 2n\int_0^t |X_s|^{2n-2}(X_s, b(X_s))ds \\ &+ 2n\int_0^t |X_s|^{2n-2}(X_s, \sigma(X_s)\cdot dW_s) + n\int_0^t |X_s|^{2n-2}(\|\sigma(X_s)\|^2 \\ &+ 2(n-1)(X_s, a(X_s)X_s)/|X_s|^2)ds \qquad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

由条件 (19.3) 及 X 的有界性，右边第二个积分的期望为 0，注意 $|(X_s, b(X_s))| \le |X_s||b(X_s)| \le K(1+|X_s|^2)$，$(X_s, a(X)X_s)|X_s|^{-2} \le \|\sigma(X_s)\|^2 \le K(1+|X_s|^2)$ 及不等式 $(1+|x|^2)|x|^{2n-2} \le 1+2|x|^{2n}$，得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_t|^{2n}] &\le |x|^{2n} + n(2n+1)K\int_0^t \mathbb{E}[(1+|X_s|^2)|X_s|^{2n-2}]ds \\ &\le |x|^{2n} + n(2n+1)K\int_0^t (1+2\mathbb{E}[|X_s|^{2n}])ds \\ &= h(t) + c_1\int_0^t \mathbb{E}[|X_s|^{2n}]ds \qquad (0 \le t \le T),\end{aligned}$$

其中 $h(t) \equiv |x|^{2n} + n(2n+1)Kt$，$c_1 \equiv 2n(2n+1)K$. 由 Gronwall-Bellman 引理得

$$\mathbb{E}[|X_t|^{2n}] \le h(t) + c_1\int_0^t e^{c_1(t-s)}h(s)ds,$$

由此得证不等式 (21.3).

为证 (21.4), 利用不等式 $(a+b)^{2n}\le 2^{2n-1}(a^{2n}+b^{2n})$ 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_t-X_s|^{2n}]&=\mathbb{E}\Big[\Big|\int_s^t b(X_u)du+\int_s^t\sigma(X_u)\cdot dW_u\Big|^{2n}\Big]\\&\le 2^{2n-1}\Big\{\mathbb{E}\Big[\Big|\int_s^t b(X_u)du\Big|^{2n}\Big]+\mathbb{E}\Big[\Big|\int_s^t\sigma(X_u)\cdot dW_u\Big|^{2n}\Big]\Big\}\\&\qquad (0\le s\le t\le T),\end{aligned}\tag{21.5}$$

由 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big|\int_s^t b(X_u)du\Big|^{2n}\Big]&\le (t-s)^{2n-1}\int_s^t\mathbb{E}|b(X_u)|^{2n}du\\&\le (t-s)^{2n-1}K^n\int_s^t\mathbb{E}(1+|X_u|^2)^n du.\end{aligned}\tag{21.6}$$

与定理 13.13 的证明类似, 由伊藤公式和 Hölder 不等式, 记 $M_t\equiv\int_s^t\sigma(X_u)\cdot dW_u$, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_t|^{2n}]&\le n(2n-1)\mathbb{E}\Big[\int_s^t|M_u|^{2n-2}\|\sigma(X_u)\|^2du\Big]\\&\le n(2n-1)\Big\{\int_s^t\mathbb{E}|M_u|^{2n}du\Big\}^{1-1/n}\Big\{\int_s^t\mathbb{E}\|\sigma(X_u)\|^{2n}du\Big\}^{1/n}\\&\le n(2n-1)\{(t-s)\mathbb{E}|M_t|^{2n}\}^{1-1/n}\Big\{K^n\int_s^t\mathbb{E}(1+|X_u|^2)^n du\Big\}^{1/n}\end{aligned}$$

($\mathbb{E}[|M_t|^{2n}]$ 随 t 而增加). 不等式两边取 n 次幂, 除以 $(\mathbb{E}|M_t|^{2n})^{n-1}$ 得

$$\mathbb{E}[|M_t|^{2n}]\le[n(2n-1)]^n(t-s)^{n-1}K^n\int_s^t\mathbb{E}(1+|X_u|^2)^n du \qquad (0\le s\le t\le T),\tag{21.7}$$

由 (21.5), (21.6), (21.7) 及 (21.3), 可知 $\exists K_1>0$ 使

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t-X_s|^{2n}] &\le K_1(t-s)^{n-1}\int_s^t \mathbb{E}(1+|X_u|^2)^n du\\
&\le K_1(t-s)^{n-1}\int_s^t 2^{n-1}(1+\mathbb{E}|X_u|^{2n})du\\
&\le 2^{n-1}K_1(t-s)^{n-1}\int_s^t [1+(1+|x|^{2n})e^{c_1u}]du\\
&= 2^{n-1}K_1(t-s)^{n-1}[(t-s)+(1+|x|^{2n})c_1^{-1}(e^{c_1t}-e^{c_1s})],
\end{aligned}
$$

利用不等式 $e^{c_1t}-e^{c_1s}\le c_1(t-s)e^{c_1t}(c_1>0,\ t\ge s)$, 即得 (21.4) 式.

定理的证明 从定理 20.4 的证明中可以看出, 系数的有界性假定仅仅用在证明 (20.15). 但在线性增长条件 (19.3) 下, 在矩的不等式 (21.4) 中取 $n=2$, 即得此估计式. 因而方程 (21.1) 存在弱解. ∎

我们已经得到了方程 (21.1) 的弱解存在性的基本结果. 但分布唯一性的证明却相当困难. 事实上, 定理 21.1 的条件并不能保证解的分布唯一性. 为了证明两个解 X 和 $\widetilde{X}$ 同分布, 即它们在 $(\mathcal{W}^m,\mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上具有相同的分布 $\widehat{\mu}_X=\widehat{\mu}_{\widetilde{X}}$, 只要对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 及 $0\le t_1<\cdots<t_n, B_1,\cdots,B_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t_1)\in B_1,\cdots,X(t_n)\in B_n\}\\
&=P\{\widetilde{X}(t_1)\in B_1,\cdots,\widetilde{X}(t_n)\in B_n\},
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mu}_X\{w(t_1)\in B_1,\cdots,w(t_n)\in B_n\}\\
&=\widehat{\mu}_{\widetilde{X}}\{w(t_1)\in B_1,\cdots,w(t_n)\in B_n\}.
\end{aligned}
$$

若事先已知 X 和 $\widetilde{X}$ 为 Markov 过程, 则只须证明它们有相同的转移概率.

一般说来, **样本连续的强 Markov 过程称为扩散过程**. 但在这里我们只限于讨论作为伊藤方程 (21.1) 的解的扩散过程, 或者

说，由 (21.2) 所定义的二阶微分算子 L 所生成的扩散过程，称为 L 扩散过程.

定义 21.3 可测空间 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的一族概率测度 $\{P_x, x \in \mathbb{R}^m\}$, 若满足以下条件：

1° 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$ 有 $P_x\{w; w(0) = x\} = 1$;

2° 对 $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m), x \longmapsto P_x(A)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 可测 (或更一般地，假定为普遍可测，参看 §3);

3° 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m, s, t \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{B}_s(\mathcal{W}^m), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 有

$$\begin{aligned} &P_x\{A \cap [w; w(s+t) \in B]\} \\ &= \int_A P_{w'(s)}\{w; w(t) \in B\} P_x(dw'), \end{aligned} \tag{21.8}$$

则称为 **Markov 族**. 此时

$$P(t, x, B) \equiv P_x\{w; w(t) \in B\} \tag{21.9}$$

称为其**转移概率**.

反复应用 (21.8), 对 $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, 可以得到

$$\begin{aligned} &P_x\{w(t_1) \in B_1, \cdots, w(t_n) \in B_n\} \\ &= \int_{B_1} P(t_1, x, dx_1) \int_{B_2} P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \int_{B_3} \cdots \\ &\quad \int_{B_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n). \end{aligned} \tag{21.10}$$

因此，若两个 Markov 族具有相同的转移概率，则它们重合.

定义 21.4 设 $\{P_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 为 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的一个 Markov 族. 对 $t \in \mathbb{R}_+$, 令

$$\overline{\mathcal{B}}_t(\mathcal{W}^m) \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{x \in \mathbb{R}^m} \overline{\mathcal{B}_{t+\varepsilon}(\mathcal{W}^m)}^{P_x}$$

(即关于一切 P_x 完备化且右连续化) 及

$$\overline{B}_\infty(\mathcal{W}^m)\equiv\sigma(\cup_{t\in\mathbb{R}_+}\overline{B}_t(\mathcal{W}^m)),$$

$\overline{\mathfrak{B}}(\mathcal{W}^m)=\{\overline{B}_t(\mathcal{W}^m),t\in\mathbb{R}_+\}$. 若对 $\forall x\in\mathbb{R}^m,t\in\mathbb{R}_+$ 及 $\overline{\mathfrak{B}}(\mathcal{W}^m)$ 停时 τ, 以及 $\forall A\in\overline{B}_\tau(\mathcal{W}^m)$, $B\in B(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\begin{aligned}&P_x\{A\cap[w;w(\tau+t)\in B]\}\\&=\int_A P_{w'(\tau)}\{w;w(t)\in B\}P_x(dw'),\end{aligned}\tag{21.11}$$

则此 Markov 族称为 **强 Markov 族**, 或 **扩散测度**.

如果此外, 还满足:

4° 对 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 及 $f\in C_K^2(\mathbb{R}^m)$($\mathbb{R}^m$ 上二次连续可微且具有紧支集的函数)

$$f(w(t))-f(w(0))-\int_0^t(Lf)(w(s))ds,\qquad t\in\mathbb{R}_+$$

为 $(P_x,B_t(\mathcal{W}^m))$ 鞅 (其中 L 由 (21.2) 定义), 则称为由 L 生成的扩散测度, 或 **L 扩散测度**. 取值于 $\mathbb{R}^m$ 的连续随机过程, 若其在 $\mathcal{W}^m$ 中的分布为

$$P_\nu(\cdot)=\int_{\mathbb{R}^m}P_x(\cdot)\nu(dx),$$

其中 $\{P_x,\ x\in\mathbb{R}^m\}$ 为 L 扩散测度, ν 为 X_0 在 $\mathbb{R}^m$ 中的分布, 则称为 **L 扩散过程**.

下面的定理 21.6 揭示了强 Markov 性和分布唯一性之间的深刻联系. 为证此定理, 先给出一个引理.

引理 21.5 R_+ 上 Borel 可测函数 φ, 若对 $\forall\lambda>0$ 有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt=0,\tag{21.12}$$

则 $\varphi(t)=0$ a.e..

证 由 (21.12), 对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $\int_0^\infty e^{-nt}\varphi(t)dt = 0$. 令 $z = e^{-t}, \psi(z) \equiv \varphi(-\log z)$ $(0 < z \le 1)$, 得

$$\int_0^1 z^{n-1}\psi(z)dz = 0. \tag{21.13}$$

特别取 $n=1$, 可知 ψ 于 $[0,1]$ 可积. 令 $\mathcal{H}$ 为 $[0,1]$ 上使 $f\psi$ 可积且满足 $\int_0^1 f(z)\psi(z)dz = 0$ 之 Borel 可测函数 f 全体, 则由 (21.13) 知 $\mathcal{H}$ 包含一切多项式函数; 由 Weierstrass 定理, $\mathcal{H}$ 包含一切连续函数; 再由单调类定理, $\mathcal{H}$ 包含一切有界 Borel 可测函数. 特别, $\psi_k \equiv \psi \mathbf{1}_{[|\psi|\le k]} \in \mathcal{H}(k \in \mathbb{N})$. 因而

$$\int_0^1 \psi(z)^2 \mathbf{1}_{[|\psi|\le k]}(z)dz = 0,$$

令 $k \uparrow \infty$, 得证 $\psi = 0$ a.e.z, 亦即 $\varphi = 0$ a.e.t. ∎

设 Φ 为 $\mathbb{R}^m$ 上有界连续函数子族, 若对 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 上任意两个概率测度 ν_1 和 ν_2, 只要对 $\forall \varphi \in \Phi$ 有: $\int \varphi(x)\nu_1(dx) = \int \varphi(x)\nu_2(dx)$, 就有 $\nu_1 = \nu_2$, 则称 Φ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的 **决定函数族**.

定理 21.6 设 $\{P_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 为 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上的一族概率, 满足定义 21.3 及定义 21.4 中的条件 1°, 2° 及 4°, 则下述命题等价:

(i) 对任一满足 1°, 2° 及 4° 之概率族 $\{P'_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 有 $P_x = P'_x$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$;

(ii) 对任一满足 1°, 2° 及 4° 之概率族 $\{P'_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 有

$$\mathbb{E}_x[\varphi(w(t))] = \mathbb{E}'_x[\varphi(w(t))] \tag{21.14}$$

对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}_+$ 及 $\varphi \in \Phi$ 成立, 其中 Φ 为 $\mathbb{R}^m$ 上某个决定函数族, $\mathbb{E}_x$ 及 $\mathbb{E}'_x$ 分别表示关于 P_x 及 P'_x 的积分;

(iii) 对任一满足 1°, 2° 及 4° 之概率族 $\{P'_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 有

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(w(t))dt\Big] = \mathbb{E}'_x\Big[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(w(t))dt\Big] \tag{21.15}$$

对 $\forall x \in \mathbb{R}^m, \lambda > 0, \varphi \in \Phi$ 成立.

若上述条件之一满足，则 $\{P_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 为 L 扩散测度.

证 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然成立. 为证 (iii)$\Longrightarrow$ (ii), 注意由 (iii) 可得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\mathbb{E}_x[\varphi(w(t))] - \mathbb{E}'_x[\varphi(w(t))])dt = 0, \qquad \forall \lambda > 0,$$

由引理 21.5 有 $\mathbb{E}_x[\varphi(w(t))] = \mathbb{E}'_x[\varphi(w(t))]$ a.e.t, 由于 $t \longmapsto \mathbb{E}_x[\varphi(w(t))]$ 连续，故有 (21.14) 成立.

为证 (ii)$\Longrightarrow$(i) 及 $\{P_x, x \in \mathbb{R}^m\}$ 为 L 扩散测度，只须证明它具有强 Markov 性 (21.11). 因为对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$ 及 $f \in C_K^2(\mathbb{R}^m)$

$$M_t^f \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t (Lf)(w(s))ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为 $(P_x, \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m))$ 鞅且轨道连续，所以它也是 $(P_x, \overline{\mathcal{B}}_t(\mathcal{W}^m))$ 鞅. 设 τ 为有界 $\overline{\mathfrak{B}}(\mathcal{W}^m)$ 停时，由定理 6.10, $\{M_{\tau+t}^f, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为 $(P_x, \overline{\mathcal{B}}_{\tau+t}(\mathcal{W}^m))$ 鞅.

令 $(\theta_\tau w)(t) \equiv w(\tau(w) + t), \widetilde{P}^w(A) = P_x(\theta_\tau^{-1}(A)|\overline{\mathcal{B}}_\tau(\mathcal{W}^m))$ 为关于 σ- 代数 $\overline{\mathcal{B}}_\tau(\mathcal{W}^m)$ 的正则条件概率. 由定理 B.5 推论 1 有

$$\widetilde{P}^w\{w'; w'(0) = w(\tau(w))\} = 1 \qquad \text{a.a.}w[P_x],$$

又对 $s < t$ 及 $A \in \overline{\mathcal{B}}_{\tau+s}(\mathcal{W}^m)$ 有

$$\mathbb{E}_x[1_A(M_{\tau+t}^f - M_{\tau+s}^f)|\overline{\mathcal{B}}_{\tau+s}(\mathcal{W}^m)] = 0 \qquad \text{a.a.}w[P_x],$$

当然更有

$$\mathbb{E}_x[1_A(M_{\tau+t}^f - M_{\tau+s}^f|\overline{\mathcal{B}}_\tau(\mathcal{W}^m)] = 0 \qquad \text{a.a.}w[P_x],$$

此即 M^f 为 $(\widetilde{P}^w, \overline{\mathcal{B}}_t(\mathcal{W}^m))$ 鞅.

由 (21.14), 对 $\forall\varphi\in\Phi$ 有

$$\int_{\mathcal{W}^m}\varphi(w'(t))\widetilde{P}^w(dw')=\int_{\mathcal{W}^m}\varphi(w'(t))P_{w(\tau)}(dw')\qquad \text{a.a.}w[P_x]. \tag{21.16}$$

由于 Φ 为决定函数族, 不难由单调类定理推出上式对 $\varphi=\mathbf{1}_B$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 成立, 即

$$\widetilde{P}^w\{w';w'(t)\in B\}=P_{w(\tau)}\{w';w'(t)\in B\}\qquad \text{a.a.}w[P_x].$$

但按定义, 上式左边为 $P_x\{w'(\tau+t)\in B|\overline{\mathcal{B}}_\tau(\mathcal{W}^m)\}$, 两边在集合 $A\in\overline{\mathcal{B}}_\tau(\mathcal{W}^m)$ 上关于 P_x 测度积分, 即得 (21.11) 式, 于是 $\{P_x,\ x\in\mathbb{R}^m\}$ 为强 Markov 族. 又由于 Φ 为决定函数族, 由 (21.14) 可知转移概率: $P(t,x,B)=P_x\{w(t)\in B\}$ 唯一确定, 再由 (21.10) 可知, 作为 $\mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ 上的概率测度的 P_x 也唯一确定, 这样, 也就同时证明了 (i). 定理证毕. ∎

定理 21.7 已知微分算子 (21.2), 假定系数 $b(x)$ 及 $a(x)$ 连续, 并选择连续函数 $\sigma:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$ 使 $\sigma(x)\sigma(x)^*=a(x)$. 设 b 及 σ 满足线性增长条件 (19.3). 则存在唯一 L 扩散测度 $\{P_x,x\in\mathbb{R}^m\}$ 的必要充分条件是: 方程 (21.1) 的解具有分布唯一性. 此时方程具有初值 $x\in\mathbb{R}^m$ 的解 $X=X(x,t,w)$ 为自 x 点出发的 L 扩散过程, 其分布为 P_x.

证 由定理 21.1, 对任一初值 $x\in\mathbb{R}^m$, 存在方程 (21.1) 的一个弱解 $X=X(x,t,w)$. 由伊藤公式, 对 $f\in C_K^2(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\begin{aligned}&f(X(x,t))-f(x)-\int_0^t(Lf)(X(x,s))ds\\&=\int_0^t(\nabla f(X(x,s)),\sigma(X(x,s))\cdot dW_s)\qquad \text{a.s..}\end{aligned}$$

容易看出, 此解在 $\mathcal{W}^m$ 上的分布 P_x 构成一个满足定义 21.3 及 21.4 中 1°, 2° 及 4° 的概率族 $\{P_x,x\in\mathbb{R}^m\}$.

若 $\{P_x, x\in \mathbb{R}^m\}$ 满足定理 21.6 中唯一性条件 (i) (或 (ii), 或 (iii)), 则显然方程 (21.1) 之解具有分布唯一性. 反之, 若方程 (21.1) 之解具有分布唯一性, 则对任一满足条件 1°, 2° 及 4° 的概率族 $\{P'_x, x\in \mathbb{R}^m\}$, 可以像定理 20.1 的证明中那样, 证明存在概率空间 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m), P'_x, \mathfrak{B}(\mathcal{W}^m))$ 的一个拓广 $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}_x, \widetilde{\mathfrak{F}})$ 及其上的 Brown 运动 $\widetilde{W}$. 如果令 $\widetilde{X}_t(\widetilde{\omega}) = (\pi\widetilde{\omega})(t)$, 则 $(\widetilde{X}, \widetilde{W})$ 为方程 (21.1) 的一个解, 显然 $\widetilde{X}$ 之分布为 P'_x. 由分布唯一性的假定, 我们有 $P'_x = P_x$ 对 $\forall x\in \mathbb{R}^m$ 成立, 因而定理 21.6 之唯一性条件 (i) 满足, 即存在唯一 L 扩散测度. ∎

下面举几个例子:

例 4.4 设 $L=\frac{1}{2}\Delta, \Delta$ 为 Laplace 算子. 此时 $b\equiv 0, a=\sigma=I$ 为 $m\times m$ 单位矩阵. 方程 (21.1) 化为 $dX_t = dW_t, X_0 = x$. 显然, 它的解具有分布唯一性, 因而算子 $\frac{1}{2}\Delta$ 生成唯一扩散测度 $\{P_x, x\in \mathbb{R}^m\}$, 即自 $x\in \mathbb{R}^m$ 出发的 m 维 Brown 运动过程 $x+W$ 在 $\mathcal{W}^m$ 上的分布, 因而此时 L 扩散过程就是 Brown 运动.

例 4.5 设 $a=(a^{ij})_{1\le i,j\le m}$ 为 $m\times m$ 非负定、对称常数矩阵, $\sigma = a^{1/2}$ 为 a 之非负定平方根, $\beta = (\beta^i_j)_{1\le i,j\le m}$ 为 $m\times m$ 常数矩阵. 对 $f\in C^2_b(\mathbb{R}^m)$, 令

$$(Lf)(x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}\partial_i\partial_j f(x) - \sum_{i,j=1}^m \beta^i_j x^j \partial_i f(x), \qquad (21.17)$$

此时 $b(x) = -\beta x$, 方程 (21.1) 化为

$$dX_t = -\beta X_t dt + \sigma\cdot dW_t, \qquad X_0 = x\in \mathbb{R}^m, \qquad (21.18)$$

显然此方程存在唯一强解, 其解的明显表达式为

$$X_t = e^{-\beta t}x + \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\sigma\cdot dW_s, \qquad t\in \mathbb{R}_+, \qquad (21.19)$$

其中

$$e^{-\beta t} \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{(-t)^n}{n!}\beta^n.$$

事实上，若令 $Y_t = x + \int_0^t e^{\beta s}\sigma \cdot dW_s$, 则 $X_t = e^{-\beta t}Y_t$, 由伊藤公式得

$$\begin{aligned} dX_t &= -\beta e^{-\beta t}Y_t dt + e^{-\beta t}dY_t \\ &= -\beta X_t dt + \sigma \cdot dW_t, \end{aligned}$$

且显然有 $X_0 = Y_0 = x$. 故 (21.19) 为方程 (21.18) 之解. 当 $m = 1, \beta > 0, \sigma > 0$ 时这就是 Langevin 方程. 其解 (21.19) 为 Ornstein-Uhlenbeck 速度过程，显然它是一个 Gauss 过程.

习题 4.2 设 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_d$ 为 $m \times m$ 可交换常数矩阵，对 $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ 令

$$\begin{aligned} (Lf)(x) \equiv & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{d}A_k x\Big)^i\Big(\sum_{k=1}^{d}A_k x\Big)^j \partial_i\partial_j f(x) \\ & + \sum_{i,j=1}^{m}(A_0)_j^i x^j \partial_i f(x). \end{aligned} \tag{21.20}$$

证明对 d 维 Brown 运动 W, 自 $x \in \mathbb{R}^m$ 出发的唯一 L 扩散过程为

$$X_t = x\exp\Big\{\Big(A_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}A_k^2\Big)t + \sum_{k=1}^{d}A_k W_t^k\Big\}, \quad t \geq 0. \tag{21.21}$$

$\Big($ 提示：令 $Y_t = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{d}A_k W_t^k\Big\}$,
$X_t = x\exp\Big\{\Big(A_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}A_k^2\Big)t\Big\}Y_t$, 应用伊藤公式 $\Big)$.

§22. 漂移变换和分布唯一性

在 §15 中，我们利用指数鞅研究了概率测度的变换问题，得到了 Girsanov 定理. 应用这种变换，可以将一个随机微分方程的漂移系数加以改变，因而这种技巧又称为**漂移变换**或 **Girsanov 变换**.

首先我们对定理 15.3 作一些推广. 在定理 15.3 中，曾要求指数鞅 Z 为一致可积，概率测度 Q 关于 P 绝对连续. 现在取消这个限制，但要假定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 具有如下的概率开拓性质：

(A): 若对 $\forall t \in \mathbb{R}_+, Q_t$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 上关于 P 绝对连续的概率测度，且满足相容性条件：

$$s \leq t \Longrightarrow Q_t|_{\mathcal{F}_s} = Q_s,$$

则在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上存在唯一概率测度 Q, 使对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $Q|_{\mathcal{F}_t} = Q_t$.

注意，此时未必有 $Q \ll P$.

例如，当 Ω 为完备可分距离空间时，上述性质满足. 我们在讨论随机微分方程解的分布时，总可以考虑其轨道空间 $\mathcal{W}^m$ 或 $\mathcal{W}_0^d$, 或其乘积空间，因此我们不妨假定 Ω 本身即具有这种性质.

定理 22.1 设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 具有性质 (A).M 为连续 P 局部鞅，且

$$Z_t \equiv \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为 P 鞅. 对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 令

$$Q_t(F) \equiv \int_F Z_t dP, \qquad F \in \mathcal{F}_t, \tag{22.1}$$

则 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上存在唯一概率测度 Q, 使对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $Q|_{\mathcal{F}_t} = Q_t$.

若 $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}_{loc}^c(P)$, 令

$$\widetilde{N}_i \equiv N_i - [N_i, M] \qquad (i = 1, 2),$$

则 $\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2 \in \mathfrak{M}_{loc}^c(Q)$, 且

$$[\widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2]^Q = [N_1, N_2]. \tag{22.2}$$

若 $N \in \mathfrak{M}_{loc}^c(P)$, $H \in \mathcal{L}_{loc}^2(N)$, $X = \int H \cdot dN$, $\widetilde{N} = N - [N, M]$, 则 $H \in \mathcal{L}_{loc}^2(\widetilde{N})$, 且

$$\widetilde{X} \equiv X - [X, M] = \int H \cdot d\widetilde{N}(Q), \tag{22.3}$$

其中最后一个积分是在 Q 测度下计算的随机积分.

注 由于 $X-[X,M]=\int H\cdot dN-\int Hd[N,M]$(习题 2.11)$=\int H\cdot d\tilde{N}$ (P), 故 (22.3) 表明，作为半鞅的随机积分的 $\int H\cdot d\tilde{N}$, 不论是在 P 或 Q 测度下计算，都是没有区别的.

证 若 $s\le t$, $F\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$, 则

$$Q_s(F)=\int_F Z_s dP=\int_F Z_t dP=Q_t(F).$$

因而 $Q_t|_{\mathcal{F}_s}=Q_s$. 由对空间所作假定，存在唯一开拓 Q. (22.2) 的证明和定理 15.3 的证明完全类似. 又由习题 2.11 及 (22.2) 可知，对一切 $N_1\in\mathfrak{M}_{loc}^c(P)$ 有

$$\begin{aligned}[\tilde{X},\tilde{N}_1]^Q=[X,N_1]&=\int Hd[N,N_1]\\&=\int Hd[\tilde{N},\tilde{N}_1]^Q,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{N}_1=N_1-[N_1,M]$. 但由习题 2.11, 随机积分 $\int H\cdot d\tilde{N}(Q)$ 是使上式左右两边相等的唯一过程 $\tilde{X}\in\mathfrak{M}_{loc}^c(Q)$, 因此 $\tilde{X}=\int H\cdot d\tilde{N}$ (Q). ∎

考虑伊藤方程 (21.1) 和微分算子 (21.2), 其中 $b:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $\sigma:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$ 为有界 Borel 可测. 假定存在 $c:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为 Borel 可测，且使 $(c(x),a(x)c(x))$ 有界.

再考虑另一个伊藤方程：

$$\begin{cases}dX_t=(b(X_t)+a(X_t)c(X_t))dt+\sigma(X_t)\cdot dW_t, & t\in\mathbb{R}_+\\ X_0=x\in\mathbb{R}^m\end{cases}\tag{22.4}$$

和与之相联系的微分算子：

$$\begin{aligned}(\tilde{L}f)(x)&\equiv(Lf)(x)+(a(x)c(x),\nabla f(x))\\&=(Lf)(x)+\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)c_j(x)\partial_i f(x),\end{aligned}\tag{22.5}$$

我们有以下结果:

定理 22.2 设方程 (21.1) 的系数 b 和 σ 有界可测，且存在 Borel 可测函数 $c: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, 使 $(c(x), a(x)c(x))$ 有界. 则方程 (21.1) 的解和方程 (22.4) 的解存在一一对应关系. 更精确地说，若 $(\mathcal{W}^m, \mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上存在概率 P, 为前一方程鞅问题的解，则存在概率 Q, 为后一方程鞅问题的解. 此外，对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, 在 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ 上有 $Q \ll P$, 且

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)} = \exp\left\{\int_0^t (c(w(s)), d\widetilde{w}(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t (c(w(s)), a(w(s))c(w(s)))ds\right\}, \tag{22.6}$$

其中 $\widetilde{w}(t) \equiv w(t) - w(0) - \int_0^t b(w(s))ds$.

反之，若 Q 为后一问题的解，则存在概率 P 为前一问题的解，且对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\left.\frac{dP}{dQ}\right|_{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)} = \exp\left\{-\int_0^t (c(w(s)), d\overline{w}(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t (c(w(s)), a(w(s))c(w(s)))ds\right\}, \tag{22.7}$$

其中 $\overline{w}(t) \equiv w(t) - w(0) - \int_0^t (b(w(s)) + a(w(s))c(w(s)))ds$.

证 设 P 为前一鞅问题的解，即对 $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$

$$X_t^f \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t (Lf)(w(s))ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为 $(P, \mathcal{B}_{t+}(\mathcal{W}^m))$ 局部鞅. 如同定理 20.1 的证明一样 (参看 (20.7) 及 (20.8)), 可以证明 $\widetilde{w} \in \mathfrak{M}_{loc}^c(P)$, 且对 $i, j = 1, 2, \cdots, m$ 有

$$[\widetilde{w}^i, \widetilde{w}^j]_t = \int_0^t a^{ij}(w(s))ds \qquad \text{a.s.}. \tag{22.8}$$

令

$$M_t \equiv \int_0^t (c(w(s)), d\widetilde{w}(s)), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

则

$$\begin{aligned}[M]_t &= \sum_{i,j=1}^m \int_0^t c_i(w(s))c_j(w(s))d[\widetilde{w}^i, \widetilde{w}^j]_s \\ &= \int_0^t \Big(\sum_{i,j=1}^m a^{ij}c_ic_j\Big)(w(s))ds \\ &= \int_0^t (c, ac)(w(s))ds. \end{aligned} \tag{22.9}$$

记 $Z_t \equiv \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}$, 因 (c, ac) 有界，故 Novikov 条件 (15.17) 满足， Z 为连续 P 鞅.

对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F \in \mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$, 令

$$Q_t(F) \equiv \int_F Z_t dP, \tag{22.10}$$

由定理 22.1, 存在唯一开拓 Q, 使对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有 $Q|_{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)} = Q_t$. 因此 (22.10) 可改写为

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)} = Z_t,$$

此即 (22.6) 式. 现证 Q 为后一鞅问题的解，即对 $\forall f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$.

$$\widetilde{X}_t^f \equiv f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t (\widetilde{L}f)(w(s))ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为连续 $(Q, \mathcal{B}_{t+}(\mathcal{W}^m))$ 局部鞅.

但我们已知 $X^f \in \mathfrak{M}_{loc}^c(P)$, 注意到 (22.5), 为证 $\widetilde{X}^f \in \mathfrak{M}_{loc}^c(Q)$, 只须证明

$$[X^f, M]_t = \int_0^t (a(w(s))c(w(s)), \nabla f(w(s)))ds \qquad \text{a.s.} \tag{22.11}$$

(因为此时有 $\widetilde{X}^f = X^f - [X^f, M]$, 由定理 22.1, $\widetilde{X}^f \in \mathfrak{M}^c_{loc}(Q)$). 选择 $g \in C^2_b(\mathbb{R}^m)$, 使得当 $|x| \leq n$ 时有 $g(x) = x^i f(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m,$ $n \in \mathbb{N})$, 如同定理 20.1 一样可证, 对 $i = 1, 2, \cdots, m$.

$$w^i(t)f(w(t)) - w^i(0)f(w(0)) - \int_0^t (b^i f)(w(s))ds$$
$$- \int_0^t w^i(s)(Lf)(w(s))ds - \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^m a^{ij}\partial_j f\Big)(w(s))ds \tag{22.12}$$

为连续 P 局部鞅. 但由半鞅的分部积分公式有

$$w^i(t)f(w(t)) = w^i(0)f(w(0)) + \int_0^t f(w(s))dw^i(s)$$
$$+ \int_0^t w^i(s)df(w(s)) + [X^f, \widetilde{w}^i]_t \qquad \text{a.s.}, \tag{22.13}$$

因为 X^f 和 $\widetilde{w}^i$ 分别为 $f(w(t))$ 及 $w^i(t)$ 分解中的局部鞅部分. 比较 (22.12) 及 (22.13), 并注意到

$$\int_0^t f(w(s))dw^i(s) - \int_0^t f(w(s))b^i(w(s))ds$$
$$= \int_0^t f(w(s))d\widetilde{w}^i(s) \in \mathfrak{M}^c_{loc}(P)$$

以及

$$\int_0^t w^i(s)df(w(s)) - \int_0^t w^i(s)(Lf)(w(s))ds$$
$$= \int_0^t w^i(s)dX^f_s \in \mathfrak{M}^c_{loc}(P),$$

利用定理 12.5 可得

$$[X^f, \widetilde{w}^i]_t = \int_0^t \Big(\sum_{j=1}^m a^{ij}\partial_j f\Big)(w(s))ds \qquad \text{a.s.},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m, \tag{22.14}$$

因此

$$
\begin{aligned}
[X^f, M]_t &= \sum_{i=1}^{m} \int_0^t c_i(w(s))d[X^f, \widetilde{w}^i]_s \\
&= \int_0^t \Big(\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij} c_i \partial_j f \Big)(w(s))ds \qquad \text{a.s.},
\end{aligned}
$$

此即 (22.11) 式，于是 Q 为 (22.4) 的解.

为证后一结论，只须将 (22.7) 右边的过程记为 Y_t. 注意到 $\widetilde{w}(t)-\overline{w}(t) = \int_0^t (ac)(w(s))ds$, 而根据定理 22.1 的注，作为半鞅的随机积分，在 P 及 Q 之下计算，是没有区别的，因此有 $Z_t Y_t \equiv 1$. 得证反过来的结论也成立.

利用漂移变换方法，在某些条件下，可以将弱解的存在性和分布唯一性问题简化为漂移系数为 0 的情况. 例如，有以下重要推论：

推论 设 a, b 有界可测，且 a 为一致正定. 即存在 $\eta > 0$, 使对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ 有

$$
(y, a(x)y) \geq \eta |y|^2. \tag{22.15}
$$

考虑方程 (21.11) 及以下方程：

$$
dX_t = \sigma(X_t) \cdot dW_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \tag{22.16}
$$

则当且仅当方程 (22.16) 存在 (依分布唯一) 弱解时，方程 (21.1) 存在 (依分布唯一) 弱解.

证 只须选 $c(x) = -a(x)^{-1} b(x)$, 此时 $b(x) + a(x)c(x) = 0$, 于是方程 (22.4) 化为 (22.16). 由定理 22.2 即得.

习题 4.3 证明以下方程：

$$
dX_t = b(X_t)dt + dW_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^m \tag{22.17}
$$

存在 (依分布唯一的) 弱解，并构造此解. 其中 $b: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 为有界 Borel 可测函数.

下面我们将给出方程 (21.1) 的解具有分布唯一性的一个充分条件. 为此, 先叙述和 Brown 运动有关算子的一些性质. 令

$$p_t(x) \equiv (2\pi t)^{-m/2} \exp\{-|x|^2/2t\} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^m,$$

$$u_\lambda(x) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x) dt \quad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}^m.$$

对 $p > 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, 令

$$T_t f(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^m} f(y) p_t(x-y) dy, \qquad t > 0,$$

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &\equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(y) u_\lambda(x-y) dy, \qquad \lambda > 0. \end{aligned}$$

根据 Young 不等式, 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^m), g \in L^q(\mathbb{R}^m), p \geq 1, q \geq 1$ 且 $p^{-1} + q^{-1} \geq 1$, 则 f 和 g 的卷积: $f * g \in L^r(\mathbb{R}^m)$, 其中 $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1$, 且

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{22.18}$$

此处令 $r = p, q = 1$, 可得

$$\|T_t f\|_{L^p} = \|f * p_t\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|p_t\|_{L^1} = \|f\|_{L^p},$$

因此 $\{T_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ 为 $L^p(\mathbb{R}^m)$ 上的线性算子压缩半群, $\{R_\lambda, \lambda > 0\}$ 为其豫解算子, 易知

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{22.19}$$

若 $p > \max(1, m/2)$, 令 $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, 则由 Hölder 不等式有

$$|R_\lambda f(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|u_\lambda\|_{L^q},$$

但由于 $\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)=m/2p<1$,

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|_{L^q} &\le \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|p_t\|_{L^q}dt\\ &\le c\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{-\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}dt<\infty,\end{aligned}$$

其中 c 为常数. 故存在只依赖于 p 和 m 的常数 $c_{p,m}$, 使对 $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^m)$ 及 $x\in\mathbb{R}^m$ 有

$$|R_\lambda f(x)|\le c_{p,m}\|f\|_{L^p}. \tag{22.20}$$

容易证明, 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^m)$ 有 $R_\lambda f\in L^p(\mathbb{R}^m)$, 二次可微, 且

$$\lambda R_\lambda f(x)-f(x)=\frac{1}{2}\Delta R_\lambda f(x)\qquad \text{a.e.}, \tag{22.21}$$

因而 $\frac{1}{2}\Delta R_\lambda$ 为 $L^p(\mathbb{R}^m)$ 上的有界线性算子. 更进一步可以证明 (例如参看 Stein[1]), 存在只依赖于 p 和 m 的常数 $\widetilde{c}_{p,m}$, 对一切 $i,j=1,2,\cdots,m$, 有

$$\|\partial_i\partial_j R_\lambda f\|_{L^p}\le \widetilde{c}_{p,m}\|f\|_{L^p}. \tag{22.22}$$

我们有以下关于分布唯一性的重要结果:

定理 22.3 设 $a=\sigma\sigma^*$ 为一致正定、有界连续, b 为有界 Borel 可测. 则方程 (21.1) 的解具有分布唯一性.

证 由定理 22.2 的推论, 不妨假定 $b\equiv 0$. 此时

$$(Lf)(x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)\partial_j\partial_j f(x). \tag{22.23}$$

由定理 21.6 及 21.7, 为证分布唯一性, 只须证明: 若 $\{P_x\}$ 及 $\{P'_x\}$ 为 $(\mathcal{W}^m,\mathcal{B}(\mathcal{W}^m))$ 上两族满足定义 21.3 及 21.4 中 $1^\circ,2^\circ$ 和 4° 的概率测度, 则对 $\forall\varphi\in C_b(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(w(t))dt\right]=\mathbb{E}'_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(w(t))dt\right]$$
$$(x\in\mathbb{R}^m,\ \lambda>0). \tag{22.24}$$

首先假定存在 $\varepsilon>0$, 使对 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 及 $i,j=1,2,\cdots,m$ 有

$$|a^{ij}(x)-\delta_{ij}|\le\varepsilon. \tag{22.25}$$

由假定 1° 及 4°, 对 $\varphi\in C_K^2(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mathbb{E}_x[\varphi(w(t))]=\varphi(x)+\int_0^t\mathbb{E}_x[(L\varphi)(w(s))]ds,$$

对 $\lambda>0$, 两边乘以 $e^{-\lambda t}$, 对 t 从 0 到 ∞ 积分, 并以 $\mu_\lambda(\varphi)$ 表示 $\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(w(t))dt\right]$, 得

$$\lambda\mu_\lambda(\varphi)=\varphi(x)+\mu_\lambda(L\varphi),$$

将 μ_λ 看作 $L^p(\mathbb{R}^m)$ 上的线性泛函, 两边减去 $\frac{1}{2}\mu_\lambda(\Delta\varphi)$ 得

$$\mu_\lambda\Big(\lambda\varphi-\frac{1}{2}\Delta\varphi\Big)=\varphi(x)+\mu_\lambda\Big(L\varphi-\frac{1}{2}\Delta\varphi\Big),$$

对 $h\in C_K^2(\mathbb{R}^m)$, 令 $\varphi=R_\lambda h$, 由 (22.21), 上式化为

$$\mu_\lambda(h)=R_\lambda h(x)+\mu_\lambda(K_\lambda h), \tag{22.26}$$

其中

$$\begin{aligned}K_\lambda h(x)&\equiv\Big(L-\frac{1}{2}\Delta\Big)R_\lambda h(x)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m(a^{ij}(x)-\delta_{ij})\partial_i\partial_jR_\lambda h(x).\end{aligned}$$

当 $p>\max(1,m/2)$ 时, 由 (22.20), (22.22) 及 (22.25) 可得如下估计式:

$$|\mu_\lambda(h)|\le c_{p,m}\|h\|_{L^p}+\frac{\varepsilon}{2}m^2\tilde{c}_{p,m}\|\mu_\lambda\|_{L^q}\|h\|_{L^p}, \tag{22.27}$$

其中 $\|\mu_\lambda\|_{L^q} \equiv \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} |\mu_\lambda(\varphi)|$. 如果我们证明了 $\|\mu_\lambda\|_{L^q} < \infty$, 则由 (22.27) 可知，当 ε 足够小，以致 $1 - \frac{\varepsilon}{2} m^2 \tilde{c}_{p,m} > 0$ 时，有

$$\|\mu_\lambda\|_{L^q} \le c_{p,m}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} m^2 \tilde{c}_{p,m}\right)^{-1} \tag{22.28}$$

现在就来证明 $\|\mu_\lambda\|_{L^q} < \infty$. 由假定 1° 及 4°, 如同定理 20.1 的证明那样，可证 $w - x \in \mathfrak{M}^c_{loc}(P_x)$ 且其交互变差过程为 $\int_0^t a^{ij}(w(s))ds$, 因而由定理 16.1, 存在 d 维 $\mathcal{B}_t(\mathcal{W}^m)$ Brown 运动 W, 使

$$w(t) = x + \int_0^t \sigma(w(s)) \cdot dW_s.$$

对 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$Y_t^{(n)}(w) \equiv w(k2^{-n} \wedge n), \qquad k2^{-n} \le t < (k+1)2^{-n},$$
$$k = 0, 1, \cdots,$$

$$X_t^{(n)}(w) \equiv x + \int_0^t \sigma(Y_s^{(n)}) \cdot dW_s,$$

则 $X^{(n)}$ 之分布 P_n 当 $n \longrightarrow \infty$ 时收敛于 P_x, 因而对 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mu_\lambda^n(\varphi) \equiv \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(X_t^{(n)})dt\right] \longrightarrow \mu_\lambda(\varphi).$$

因为对一切 n 及 k, 在正则条件概率

$$P_n(\cdot | \mathcal{B}_{k2^{-n}}(\mathcal{W}^m))$$

下， $\{w(t), k2^{-n} \le t < (k+1)2^{-n}\}$ 是一个 d 维 Brown 运动经过常数矩阵 $\sigma(w(k2^{-n}))$ 线性变换而得到，由 (22.20) 可知

$$\|\mu_\lambda^n\|_{L^q} \equiv \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \left|\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(X_t^{(n)})dt\right]\right| < \infty,$$

于是对 μ_λ^n, 不等式 (22.28) 成立. 令 $n \longrightarrow \infty$, 由 Fatou 引理得证 (22.28) 对 μ_λ 也成立.

对于 $\{P'_x\}$ 同样讨论, 得

$$\mu'_\lambda(h) = R_\lambda h(x) + \mu'_\lambda(K_\lambda h). \tag{22.26$'$}$$

比较 (22.26) 式, 得

$$(\mu_\lambda - \mu'_\lambda)(h) = (\mu_\lambda - \mu'_\lambda)(K_\lambda h),$$

但

$$\|K_\lambda h\|_{L^p} \le \frac{\varepsilon}{2} m^2 \widetilde{c}_{p,m} \|h\|_{L^p},$$

因此

$$\sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \left|(\mu_\lambda - \mu'_\lambda)(\varphi)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} m^2 \widetilde{c}_{p,m} \sup_{\|\varphi\|_p \le 1} \left|(\mu_\lambda - \mu'_\lambda)(\varphi)\right|,$$

选 ε 足够小, 使 $\frac{\varepsilon}{2} m^2 \widetilde{c}_{p,m} < 1$, 由此即得

$$\mu_\lambda(\varphi) = \mu'_\lambda(\varphi), \qquad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^m),$$

此即 (22.24) 式.

为除去条件 (22.25) 的限制, 首先注意在 (22.25) 中, 单位矩阵 $I = (\delta_{ij})$ 可代之以任一正定常数矩阵 $c = (c^{ij})$. 若存在常数 η 及 $\widetilde{\eta}$, 满足 $0 < \eta < \widetilde{\eta} < \infty$, 使对 $\forall y \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\eta |y|^2 \le (y,\ cy) \le \widetilde{\eta} |y|^2, \tag{22.29}$$

则 ε 可选得不依赖于 c(只依赖于 η 及 $\widetilde{\eta}$). 令

$$\tau(w) \equiv \inf\left\{t;\ \max_{1 \le i,j \le m} |a^{ij}(w(t)) - a^{ij}(w(0))| \ge \varepsilon\right\},$$

则 τ 为 $B_t(\mathcal{W}^m)$ 停时. 对任意停时 θ, 令

$$w_\theta^-(u) \equiv w(\theta \wedge u);$$

若 θ a.s. 有限，令

$$w_\theta^+(u) \equiv w(\theta + u).$$

由定理 6.10, 若对 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ 令

$$\widetilde{P}_w(A) \equiv P_x(w_\theta^+ \in A | \mathcal{B}_\theta(\mathcal{W}^m)),$$

则对 (P_x) a.a.$w, \widetilde{P}_w$ 满足条件 4° 及

$$\widetilde{P}_w\{w'; w'(0) = w(\theta)\} = 1.$$

由前面讨论，我们有

$$P_x\{w_\tau^- \in A\} = P_x'\{w_\tau^- \in A\}, \qquad x \in \mathbb{R}^m, A \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m),$$

记上述值为 $p(x, A)$, 并归纳地定义

$$\begin{aligned}
&\tau_0(w) = 0,\\
&\tau_1(w) = \tau(w),\\
&\tau_2(w) = \tau_1(w) + \tau(w_{\tau_1}^+), \text{ 若 } \tau_1(w) < \infty,\\
&\qquad\vdots\\
&\tau_{n+1}(w) = \tau_n(w) + \tau(w_{\tau_n}^+), \text{ 若 } \tau_n(w) < \infty,
\end{aligned}$$

则 $\tau_n(w) \uparrow \infty$. 记

$$(\phi_n w)(u) \equiv w((\tau_n + u) \wedge \tau_{n+1}),$$

设 $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{W}^m)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, 则

$$\begin{aligned}
&P_x\{w; \phi_0 w \in A_0, \phi_1 w \in A_1, \cdots, \phi_n w \in A_n\}\\
&= \int_{A_0} p(x, dw_0) \int_{A_1} p\{w_0(\tau(w_0)), dw_1\} \int_{A_2} \cdots\\
&\quad \cdot \int_{A_n} p\{w_{n-1}(\tau(w_{n-1})), dw_n\}\\
&= P_x'\{w; \phi_0 w \in A_0, \phi_1 w \in A_1, \cdots, \phi_n w \in A_n\},
\end{aligned}$$

因而有 $P'_x = P_x$.

由定理可知，当 $a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^*$ 有界连续、一致正定，$b(x)$ 有界可测时，L 扩散测度唯一地存在. 此外，由于存在唯一强解蕴含分布唯一性，故由定理 19.4, 当 $b(x)$ 和 $\sigma(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件 (19.2) 及线性增长条件 (19.3) 时，L 扩散测度唯一地存在. 当 $m=d=1$ 时，还可以利用定理 19.5 得到更弱的条件.

§23. 随机微分同胚流

考虑常微分方程：

$$d\phi_t = b(\phi_t)dt, \qquad \phi_0 = x \in \mathbb{R}^m, \qquad t \in \mathbb{R},$$

其中系数 $b: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 为 Lipschitz 连续. 容易证明：其唯一解 $\phi_t = \phi_t(x)$ 具有以下性质：

1° 对 $\forall t$, $\phi_t: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 为同胚映射 (即 ϕ_t 同时为单射及满射，ϕ_t 及 ϕ_t^{-1} 连续);

2° $\phi_0 = I$, 且对 $\forall s,t$ 有 $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$;

3° $(t,x) \longmapsto \phi_t(x)$ 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的连续映射.

$\{\phi_t, t\in\mathbb{R}\}$ 称为由此方程 (或由向量场 b) 产生的 **同胚流**. 若系数具有更光滑的性质，则 $\phi_t: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 为微分同胚 (即 ϕ_t 及 ϕ_t^{-1} 均可微的同胚映射), 称为 **微分同胚流**.

现在考虑随机微分方程 (21.1). 假定系数满足 Lipschitz 条件 (19.1), 则由定理 19.3 可知，此方程有唯一强解 $X = X(x,t,\omega) = \Phi(x,t,W.(\omega))$. 我们要证明：对几乎所有 ω, 一切 $t \geq 0, x \longmapsto X(x,t,\omega)$ 是 $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的同胚，$X(x,0,\omega) = x$, 且 $X_s(\theta_t\omega)\circ X_t(\omega) = X_{s+t}(\omega)$, 即 $X(X(x,t,\omega),s,\theta_t\omega) = X(x,s+t,\omega)$, 其中 θ_t 为推移算子. 若系数 k 次连续可微，且一阶偏导数有界，则它是 C^{k-1} 级微分同胚. 称为 **随机微分同胚流**.

随机流的概念首先由 Elworthy 引进，一般有三种构造方法：

1° 把状态空间从 $\mathbb{R}^m$ 转为由同胚或微分同胚构成的拓扑群 G, 通过求解拓扑群 G 中的随机微分方程，可直接得到一个 G 值随机过程，即随机流．这种方法可参看 Elworthy[1].

2° 用分段光滑曲线去逼近 Brown 运动轨道，用通常的常微分方程去逼近随机微分方程，通过极限过程来构造随机流．这种方法例如可参看 Malliavin[2] 和 Ikeda-Watanabe[1].

3° 利用伊藤公式得到随机方程解的 L^p 估计, 利用 Kolmogorov 关于随机场的连续修正以及代数拓扑的基本事实来证明同胚性质，从而得到随机流．这种方法可参看 Kunita[1,2,3].

我们下面采用 Kunita 的方法，为此先证明一些引理：

引理 23.1 设伊藤方程 (21.1) 的系数 b 和 σ 满足 Lipschitz 条件 (19.1), $X = X(x,t,\omega)$ 为其唯一强解．则对 $p \geq 2$ 及 $T > 0$, 存在常数 $c_{p,T}$, 使对一切 $x, y \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} |X(x,t) - X(y,t)|^p\Big] \leq c_{p,T}|x-y|^p, \tag{23.1}$$

$$\mathbb{E}[|X(x,s) - X(y,t)|^p] \leq c_{p,T}(|x-y|^p + |s-t|^{p/2}) \quad (0 \leq s,\ t \leq T). \tag{23.2}$$

证 由于

$$X(x,t) - X(y,t) = x - y + \int_0^t (b(X(x,s)) - b(X(y,s)))ds + \int_0^t (\sigma(X(x,s)) - \sigma(X(Y,s))) \cdot dW_s,$$

故

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq s\leq t} |X(x,s) - X(y,s)| \\ &\leq |x-y| + \int_0^t |b(X(x,s)) - b(X(y,s))|ds \\ &\quad + \sup_{0\leq s\leq t}\Big|\int_0^s (\sigma(X(x,u)) - \sigma(X(y,u))) \cdot dW_u\Big|.\end{aligned}$$

利用不等式 $(a+b+c)^p \le 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p)$ 及命题 13.12 和 Lipschitz 条件，可知存在只依赖 p,T,K 的常数 c_0 使

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|X(x,s)-X(y,s)|^p]\\ \le& 3^{p-1}|x-y|^p + c_0\int_0^t \mathbb{E}[\sup_{0\le u\le s}|X(x,u)-X(y,u)|^p]ds,\end{aligned}$$

由 Gronwall-Bellman 引理，即得估计式 (23.1), (23.2) 的证明类似，留作习题由读者完成.

习题 4.4 证明估计式 (23.2).

为了得到映射 $(x,t)\longmapsto X(x,t,\omega)$ 的连续性，我们要对 Kolmogorov 关于连续修正的定理作一些推广：

引理 23.2 设 φ 及 ψ 为 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 上严格单调上升的连续函数，$\varphi(0)=\psi(0)=0, \psi(\infty)=\infty$; E 为一赋范线性空间; $a\in\mathbb{R}^m, B(a,r)\equiv\{x\in\mathbb{R}^m; |x-a|<r\}$ 为以 a 为心以 r 为半径的开球.

若映射 $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow E$ 在 $B(a,r)$ 上强连续，且存在常数 $c>0$ 使

$$\int_{B(a,r)}\int_{B(a,r)}\psi\Big(\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\varphi(|x-y|)}\Big)dxdy\le c, \tag{23.3}$$

则对 $\forall x,y\in B(a,r)$ 有

$$\|f(x)-f(y)\|\le 8\int_0^{|x-y|}\psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2u^{2m}}\Big)d\varphi(u), \tag{23.4}$$

其中

$$\gamma=\inf_{x\in B(a,r)}\inf_{0<\rho\le r}\rho^{-m}|B(x,\rho)\cap B(a,r)|$$

($|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的 Lebesgue 测度).

证 令

$$I(x)\equiv\int_{B(a,r)}\psi\Big(\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\varphi(|x-y|)}\Big)dy,$$

设 $x,y\in B(a,r), x\neq y$. 令 $\rho=|x-y|$, 选 $x_0\in B(a,\gamma)\bigcap B\Big(\frac{1}{2}(x+y),\rho/2\Big)$, 使

$$I(x_0)\le c2^{m+1}/\gamma\rho^m$$

(由于 $\int_{B(a,r)}I(x)dx\le c$, 这样的 x_0 总存在). 令 $y_0=x_0$. 若已选好 x_{n-1} 及 y_{n-1}, 则定义 s_{n-1} 及 t_{n-1} 使

$$\varphi(s_{n-1})=\frac{1}{2}\varphi(2|x_{n-1}-x|),$$

$$\varphi(t_{n-1})=\frac{1}{2}\varphi(2|y_{n-1}-y|),$$

并选择 $x_n\in B(x,\frac{1}{2}s_{n-1})\bigcap B(a,r)$ 及 $y_n\in B(y,\frac{1}{2}t_{n-1})\bigcap B(a,r)$ 使

$$I(x_n)\le c2^{m+1}/\gamma s_{n-1}^m;\ I(y_n)\le c2^{m+1}/\gamma t_{n-1}^m,$$

$$\psi\Big(\frac{\|f(x_n)-f(x_{n-1})\|}{\varphi(|x_n-x_{n-1}|)}\Big)\le\frac{2^{m+1}I(x_{n-1})}{\gamma s_{n-1}^m},$$

$$\psi\Big(\frac{\|f(y_n)-f(y_{n-1})\|}{\varphi(|y_n-y_{n-1}|)}\Big)\le\frac{2^{m+1}I(y_{n-1})}{\gamma t_{n-1}^m}$$

(根据选 x_0 及 y_0 同样理由，这样的 x_n 及 y_n 总存在). 注意 $\varphi(s_n)=\frac{1}{2}\varphi(2|x_n-x|)<\frac{1}{2}\varphi(s_{n-1})$, 故 $s_n\downarrow 0$. 又对 $n\ge 1$(记 $s_{-1}=\rho$) 有

$$\begin{aligned}\|f(x_n)-f(x_{n-1})\|&\le\psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 s_{n-1}^m s_{n-2}^m}\Big)\varphi(|x_n-x_{n-1}|)\\&\le\psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 s_{n-1}^{2m}}\Big)\varphi(|x_n-x_{n-1}|),\end{aligned}$$

因 $2\varphi(s_{n-1})=\varphi(2|x_{n-1}-x|)$, 故 $s_{n-1}<2|x_{n-1}-x|$,

$$\begin{aligned}\varphi(|x_n-x_{n-1}|)&\le\varphi(2|x_{n-1}-x|)=2\varphi(s_{n-1})\\&=4\Big(\varphi(s_{n-1})-\frac{1}{2}\varphi(s_{n-1})\Big)\le 4(\varphi(s_{n-1})-\varphi(s_n)),\end{aligned}$$

于是得到

$$\|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \le 4\psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 s_{n-1}^{2m}}\Big)(\varphi(s_{n-1})-\varphi(s_n))$$

$$\le 4\int_{s_n}^{s_{n-1}} \psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 u^{2m}}\Big)d\varphi(u), \quad n\in \mathbb{N},$$

对 n 求和得

$$\|f(x)-f(x_0)\| \le 4\int_0^{\rho} \psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 u^{2m}}\Big)d\varphi(u).$$

同样讨论可得

$$\|f(y)-f(x_0)\| \le 4\int_0^{\rho} \psi^{-1}\Big(\frac{4^{m+1}c}{\gamma^2 u^{2m}}\Big)d\varphi(u),$$

于是有估计式 (23.4).

引理 23.3 设 $\{X(x),\ x\in \mathbb{R}^m\}$ 为取值 Banach 空间 E 的一族随机变量 (随机场). 若存在 $\alpha>0$, $c\ge 0$ 及 $p>0$, 使

$$\mathbb{E}[\|X(x)-X(y)\|^p] \le c|x-y|^{m+\alpha} \qquad (x,y\in \mathbb{R}^m), \tag{23.5}$$

则存在等价形 $\{\widetilde{X}(x),\ x\in \mathbb{R}^m\}$, 对 $\forall x\in \mathbb{R}^m$, 有 $\widetilde{X}(x)=X(x)$ a.s., 且 $x\longmapsto \widetilde{X}(x)$ 为强连续 a.s..

证 对 $\forall n\in \mathbb{N}$, 以 $X^{(n)}(\cdot)$ 表示 $\{X(k2^{-n});\ k\in \mathbb{Z}^m\}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上的线性开拓. 不难证明 $\exists\ \widetilde{c}=\widetilde{c}(\alpha,p,c)$, 使

$$\mathbb{E}[\|X^{(n)}(x)-X^{(n)}(y)\|^p] \le \widetilde{c}\ |x-y|^{m+\alpha}. \tag{23.6}$$

令 $\rho=p^{-1}(2m+\alpha/2)$. 由 (23.6) 存在 $c'=c'(m,\widetilde{c})$ 使

$$\sup_n \mathbb{E}\Big[\int_{B(0,r)}\int_{B(0,r)}\Big(\frac{\|X^{(n)}(x)-X^{(n)}(y)\|}{|x-y|^{\rho}}\Big)^p dxdy\Big] \le c'r^{2m},$$

取 $\psi(u)=u^p$, $\varphi(u)=u^\rho$, 由引理 23.2, 若上式方括号内式子不超过 η, 则对 $\forall x,y\in B(0,r)$, 有

$$\|X^{(n)}(x)-X^{(n)}(y)\|\le K\eta^{1/p}|x-y|^{\alpha/2p},$$

其中 K 为依赖于 α,p 及 m 常数. 此即

$$\sup_{\substack{x,y\in B(0,r)\\ x\neq y}}\frac{\|X^{(n)}(x)-X^{(n)}(y)\|}{|x-y|^{\alpha/2p}}\le K\eta^{1/p}.$$

上式左边关于 n 单调, 由 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned}P\Big\{\sup_n\sup_{\substack{x,y\in B(0,r)\\ x\neq y}}\frac{\|X^{(n)}(x)-X^{(n)}(y)\|}{|x-y|^{\alpha/2p}}\le K\eta^{1/p}\Big\}\\ \ge 1-\frac{c'r^{2m}}{\eta},\end{aligned}$$

由于 $X^{(n)}(k2^{-n})=X(k2^{-n})$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 及 $k\in\mathbb{Z}^m$ 成立, $X^{(n)}$ a.s. 于 $B(0,r)$ 一致收敛于某连续函数 $\widetilde{X}$, 且 $\widetilde{X}$ 在 $B(0,r)$ 的上述格子点上和 X 重合. 因为当 $|x-y|\longrightarrow 0$ 时有 $\mathbb{E}[\|X(x)-X(y)\|^p]\longrightarrow 0$, 所以对 $\forall x\in B(0,r)$, 有 $\widetilde{X}(x)=X(x)$ a.s., 既然 r 是任意的, 故引理得证.

习题 4.5 应用上述引理证明 Brown 运动的局部时 $L(t,a)$ 存在关于 (t,a) 二元连续的等价形.

(提示: 利用 (17.12), 只要证明随机积分: $\int_0^t 1_{(a,\infty)}(W_s)dW_s$ 存在关于 (t,a) 二元连续的等价形).

由 (23.2) 式及引理 23.3, 只要取 $p>2(m+1)$, 立即有以下定理:

定理 23.4 设方程 (21.1) 的系数满足 Lipschitz 条件 (19.1), $X=X(x,t,\omega)$ 为其唯一强解, 则存在 X 的等价形 $\widetilde{X}$, 使对 a.a.ω,

$$(x,t)\longmapsto\widetilde{X}(x,t,\omega)$$

为 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 的连续函数.

此后, 我们总选此等价形为方程 (21.1) 的解. 下面讨论当 $t>0$ 固定时, $x\longmapsto X(x,t,\omega)$ 的同胚性质. 首先要证明它是连续单射, 为此将上述不等式由 $p\geq 2$ 改为一般的 $\alpha\in\mathbb{R}$(可以为负值). 以下均假定方程 (21.1) 的系数满足 (19.1), 且 $X=X(x,t,\omega)$ 为其唯一解, 对 a.a.ω, 关于 (x,t) 为连续.

引理 23.5 设 $T>0,\alpha\in\mathbb{R}$, 则 $\exists c_{\alpha,T}<\infty$, 对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 及 $t\in[0,T]$ 有

$$\mathbb{E}[|X(x,t)-X(y,t)|^\alpha]\leq c_{\alpha,T}|x-y|^\alpha. \tag{23.7}$$

证 对 $x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$, 令 $f(x)=|x|^\alpha$. 则 $\partial_i f(x)=\alpha|x|^{\alpha-2}x_i$, $\partial_i\partial_j f(x)=\alpha|x|^{\alpha-2}\delta_{ij}+\alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}x_ix_j$. 设 $x\neq y$, $0<\varepsilon<|x-y|$, 令

$$\tau_\varepsilon\equiv\inf\{t;\ |X(x,t)-X(y,t)|\leq\varepsilon\},$$

$$Z_t^\varepsilon\equiv X(x,\tau_\varepsilon\wedge t)-X(y,\tau_\varepsilon\wedge t),\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

由伊藤公式可知

$$\begin{aligned}|Z_t^\varepsilon|^\alpha-|x-y|^\alpha-\alpha\int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon}&|Z_s^\varepsilon|^{\alpha-2}(b(X(x,s)))-b(X(y,s)),Z_s^\varepsilon)ds\\ -\frac{\alpha}{2}\int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon}&|Z_s^\varepsilon|^{\alpha-2}(\|\sigma(X(x,s))-\sigma(X(y,s))\|^2\\ &+(\alpha-2)|(\sigma(X(x,s))-\sigma(X(y,s)))^*Z_s^\varepsilon|^2|Z_s^\varepsilon|^{-2})ds\end{aligned}$$

为连续鞅, 故由 Lipschitz 条件知存在 $c=c(\alpha,m,d)$ 使

$$\mathbb{E}[|Z_t^\varepsilon|^\alpha]\leq|x-y|^\alpha+c\int_0^t\mathbb{E}[|Z_s^\varepsilon|^\alpha]ds,$$

由 Gronwall-Bellman 引理

$$\mathbb{E}[|Z_t^\varepsilon|^\alpha]\leq|x-y|^\alpha e^{ct},$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 则 $\tau_\varepsilon \uparrow \tau \equiv \inf\{t > 0; X(x,t) = X(y,t)\}$, 得

$$\mathbb{E}[|X(x,\tau \wedge t) - X(y,\tau \wedge t)|^\alpha] \leq e^{ct}|x-y|^\alpha.$$

取 $\alpha = -1$, 可知 $\tau = \infty$ a.s., 故 (23.7) 成立.

此引理表明, 当 $x \neq y$ 时, 对 $\forall t > 0$ 有 $X(x,t) \neq X(y,t)$ a.s., 为了证明此例外集并不依赖于 x 及 y, 我们需要以下引理:

引理 23.6 对 $t \geq 0$ 及 $x, y \in \mathbb{R}^m, x \neq y$, 令

$$\eta(t,x,y) \equiv |X(x,t) - X(y,t)|^{-1},$$

则对 a.a.ω, η 关于 (t,x,y) 为 $\mathbb{R}_+ \times \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2m}; x \neq y\}$ 上的连续函数.

证 由引理 23.3, 只须证明: 对 $T > 0, \delta > 0$ 及某个 $p > 2(2m+1)$, 存在 $c = c(T,\delta,p)$, 使对 $\forall t,t' \in [0,T]$ 及 $x,y,x',y' \in \mathbb{R}^m$, 只要 $|x-y| \bigwedge |x'-y'| \geq \delta$, 就有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|\eta(t,x,y) - \eta(t',x',y')|^p] \\ &\leq c(|x-x'|^p + |y-y'|^p + |t-t'|^{p/2}.\end{aligned} \tag{23.8}$$

但

$$\begin{aligned}&|\eta(t,x,y) - \eta(t',x',y')|^p \\ &= |\eta(t,x,y)|^p|\eta(t',x',y')|^p||X(x,t) - X(y,t)| \\ &\quad - |X(x',t') - X(y',t')||^p \\ &\leq 2^{p-1}|\eta(t,x,y)|^p|\eta(t',x',y')|^p(|X(x,t) - X(x',t')|^p \\ &\quad + |X(y,t) - X(y',t')|^p),\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|\eta(t,x,y) - \eta(t',x',y')|^p] \leq 2^{p-1}(\mathbb{E}|\eta(t,x,y)|^{4p})^{1/4} \\ &\cdot (\mathbb{E}|\eta(t',x',y')|^{4p})^{1/4}\{(\mathbb{E}|X(x,t) - X(x',t')|^{2p})^{1/2} \\ &+ (\mathbb{E}|X(y,t) - X(y',t')|^{2p})^{1/2}\},\end{aligned}$$

由 (23.7) 及 (23.2) 即可知上式不超过

$$
\begin{aligned}
&c_{p,T}|x-y|^{-p}|x'-y'|^{-p}(|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{p/2})\\
&\le c_{p,T}\delta^{-2p}(|x-x'|^p+|y-y'|^p+2|t-t'|^{p/2})
\end{aligned}
$$

(因 $|x-y|\bigwedge|x'-y'|\ge\delta$), 此即 (23.8). 因 T 和 δ 是任意正数, 故引理得证.

根据这个引理, 可以开除一个不依赖于 x 和 y 的零概率集合 N, 当 $\omega\overline{\in}N$ 时, 只要 $x\neq y$, 就有 $X(x,t,\omega)\neq X(y,t,\omega)$ 对一切 $t\in\mathbb{R}_+$ 成立, 因而对 $\forall t\in\mathbb{R}_+, x\longmapsto X(x,t,\omega)$ 为连续单射. 为证它也是满射, 我们还需要以下引理:

引理 23.7 对 $T>0$ 及 $\alpha\in\mathbb{R},\exists c=c(\alpha,T)$, 使对 $\forall x\in\mathbb{R}^m, t\in[0,T]$ 有

$$
\mathbb{E}(1+|X(x,t)|^2)^\alpha\le c(1+|x|^2)^\alpha. \tag{23.9}
$$

证 令 $f(x)=(1+|x|^2)^\alpha$, 则 $\partial_i f(x)=2\alpha(1+|x|^2)^{\alpha-1}x_i, \partial_i\partial_j f(x)=2\alpha(1+|x|^2)^{\alpha-1}\delta_{ij}+4\alpha(\alpha-1)(1+|x|^2)^{\alpha-2}x_ix_j$. 由伊藤公式得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(1+|X(x,t)|^2)^\alpha-(1+|x|^2)^\alpha\\
&=\mathbb{E}\Big[\int_0^t 2\alpha(1+|X(x,s)|^2)^{\alpha-1}(b(X(x,s)),X(x,s))ds\Big]\\
&+\mathbb{E}\Big[\int_0^t \alpha(1+|X(x,s)|^2)^{\alpha-1}\{\|\sigma(X(x,s))\|^2\\
&+2(\alpha-1)(X(x,s),a(X(x,s))X(x,s))(1+|X(x,s)|^2)^{-1}\}ds\Big],
\end{aligned}
$$

由 Lipschitz 条件可推出线性增长条件 (19.3), 因而存在常数 c_1 使

$$
\mathbb{E}(1+|X(x,t)|^2)^\alpha\le(1+|x|^2)^\alpha+c_1\int_0^t\mathbb{E}(1+|X(x,s)|^2)^\alpha ds,
$$

再由 Gronwall-Bellman 引理, 即得 (23.9).

下面是本节主要定理. 为证明同胚性质, 需要代数拓扑的一个基本结果. 先回忆代数拓扑的一些基本概念.

设 $E,\widetilde{E}$ 为拓扑空间， $f,g\in C(E\to\widetilde{E})$ 为自 E 到 $\widetilde{E}$ 的连续映射. 记 $I=[0,1]$. 若 $\exists h\in C(E\times I\to\widetilde{E})$, 使 $h(x,0)=f(x)$ 及 $h(x,1)=g(x)$ 对 $\forall x\in E$ 成立, 则称 f 与 g同伦, 记为 $f\simeq g:E\longrightarrow\widetilde{E}$. 显然同伦关系为 $C(E\to\widetilde{E})$ 中的等价关系，因此将 $C(E\to\widetilde{E})$ 中的连续映射分成一些等价类, 其中同伦于常值映射的映射称为 **零伦**. 若恒等映射 $I_E:E\longrightarrow E$ 为零伦，则 E 称为 **可缩空间**. 例如 $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸集均为可缩空间, 但其中单位球面 S^{n-1} 则不可缩. 我们有以下简单命题:

命题 23.8 到单位球面中的连续映射如果不是满射, 则必为零伦.

命题 23.9 (不变域定理) 若 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中连通开集， $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 为连续单射，则 f 为 $U\longrightarrow f(U)$ 的同胚.

由命题 23.8 可以推出，同伦于恒等映射:

$$I_{S^n}:\ S^n\longrightarrow S^n$$

的映射必为满射. 众所周知， $\overline{\mathbb{R}^n}\equiv\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ ($\mathbb{R}^n$ 的单点紧化) 同胚于单位球面 S^n, 因此，同伦于恒等映射:

$$I_{\overline{R^n}}:\ \overline{\mathbb{R}^n}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^n}$$

的映射必为满射.

定理 23.10 设方程 (21.1) 的系数满足 Lipschitz 条件 (19.1), $X=X(x,t,\omega)$ 为由定理 23.4 所确定的解关于 (x,t) 连续的等价形. 则对 a.a.ω 和一切 $t\in\mathbb{R}_+$, $x\longmapsto X(x,t,\omega)$ 为 $\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 的同胚.

证 在 $\overline{\mathbb{R}^m}\times\mathbb{R}_+$ 上定义

$$Y(x,t)\equiv\begin{cases}(1+|X(x,t)|)^{-1}, & x\in\mathbb{R}^m,\quad t\in\mathbb{R}_+\\ 0, & x=\infty,\quad t\in\mathbb{R}_+,\end{cases}$$

显然对 a.a.$\omega,Y(x,t)$ 于 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}_+$ 连续. 为证其在 ∞ 的邻域连续, 只须证明对 $\forall t>0,\varepsilon>0,\exists R>0$, 当 $t\in[0,T]$ 及 $|x|\geq R$ 时有 $Y(x,t)<\varepsilon$.

选取 $p>2(2m+1)$, 因为

$$|Y(y,t)-Y(x,s)|^p\le|Y(y,t)|^p|Y(x,s)|^p|X(y,t)-X(x,s)|^p,$$

所以由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Y(y,t)-Y(x,s)|^p]\le&(\mathbb{E}|Y(y,t)|^{4p})^{1/4}\\&(\mathbb{E}|Y(x,s)|^{4p})^{1/4}(\mathbb{E}|X(y,t)-X(x,s)|^{2p})^{1/2}.\end{aligned}$$

由不等式 $1+|x|\ge(1+|x|^2)^{1/2}\ge\frac{1}{2}(1+|x|)$ 及 (23.9) 可知 $\exists c_{p,T}>0$, 对 $s,t\in[0,T]$ 有

$$(\mathbb{E}|Y(y,t)|^{4p})^{1/4}(\mathbb{E}|Y(x,s)|^{4p})^{1/4}\le c_{p,T}(1+|x|)^{-p}(1+|y|)^{-p},$$

又由 (23.2) 可知 $\exists\,\tilde{c}_{p,T}>0$, 对 $s,t\in[0,T]$ 有

$$(\mathbb{E}|X(y,t)-X(x,s)|^{2p})^{1/2}\le\tilde{c}_{p,T}(|x-y|^p+|s-t|^{p/2}),$$

于是 $\exists\,c'_{p,T}>0$ 使

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[|Y(y,t)-Y(x,s)|^p]\\&\le c'_{p,T}\Big\{\Big(\frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)}\Big)^p+|s-t|^{p/2}\Big\}.\end{aligned}$$

对 $x\neq0$, 令 $\tilde{x}\equiv x/|x|^2$, $\tilde{0}\equiv\infty$ 以及

$$\widetilde{Y}(x,t)\equiv Y(\tilde{x},t),\qquad x\in\overline{\mathbb{R}^m},t\in\mathbb{R}_+,$$

为证 Y 在 ∞ 邻域连续, 只须证 $\widetilde{Y}$ 在 0 点邻域连续. 但当 $|y|\ge|x|>0$ 时有

$$\begin{aligned}|\tilde{x}-\tilde{y}|&=|x|^{-2}|y|^{-2}|x|y|^2-y|x|^2|\\&\le|x|^{-2}|y|^{-2}(|x|y|^2-x|x|^2|+|x|x|^2-y|x|^2|)\\&=|y|^{-2}(|x|^{-1}(|y|^2-|x|^2)+|x-y|),\end{aligned}$$

$$(1+|\tilde{x}|)^{-1}=|x|(1+|x|)^{-1},$$

$$(1+|\widetilde{y}|)^{-1}=|y|(1+|y|)^{-1}.$$

故

$$\begin{aligned}&|\widetilde{x}-\widetilde{y}|(1+|\widetilde{x}|)^{-1}(1+|\widetilde{y}|)^{-1}\\&\leq |y|^{-1}(|y|^2-|x|^2)+|x-y|\\&=|y|^{-1}(|y|+|x|)(|y|-|x|)+|x-y|\\&\leq 3|x-y|,\end{aligned}$$

于是当 $x,y\neq 0$ 时有

$$\mathbb{E}[|\widetilde{Y}(y,t)-\widetilde{Y}(x,s)|^p]\leq c''_{p,T}[|x-y|^p+|s-t|^{p/2}].$$

由 (23.9), 当 $|\widetilde{x}|\longrightarrow\infty$ 时对 $\forall t>0$ 有 $Y(\widetilde{x},t)\xrightarrow{L^p}0$, 因而上式当 x 或 y 为 0 时仍成立. 根据引理 23.3, $\widetilde{Y}$ 存在连续等价形, 得证 Y 于 $\overline{\mathbb{R}^m}\times\mathbb{R}_+$ 连续. 补充定义 $X(\infty,t)\equiv\infty$, 则 X 于 $\overline{\mathbb{R}^m}\times\mathbb{R}_+$ 连续. 但当 $t=0$ 时, $x\longmapsto X(x,0)$ 为 $\overline{\mathbb{R}^m}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^m}$ 的恒等映射, 故对 $\forall t>0$, $x\longmapsto X(x,t)$ 与恒等映射同伦. 根据命题 23.8, 此映射必为满射; 根据命题 23.9, 其逆映射连续, 因而为 $\overline{\mathbb{R}^m}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}^m}$ 的同胚. 又因 $\forall t$, 有 $X(\infty,t)=\infty$, 所以也是 $\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 的同胚.

关于微分同胚, 我们可以得到如下结果:

定理 23.11 设方程 (21.1) 的系数 k 次连续可微 ($k\geq 1$), 且所有一阶偏导数有界. 则其由定理 23.4 所确定的解 $X=X(x,t,\omega)$ 对 a.a.ω 及 $\forall t\in\mathbb{R}_+, x\longmapsto X(x,t,\omega)$ 为 $\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 之 C^{k-1} 级微分同胚.

若 $J(x,t)\equiv(\partial_j X^i(x,t))_{1\leq i,j\leq m}$ 为其 Jacobi 矩阵, 则 $J(x,t)$ 为以下 (矩阵值) 随机微分方程的唯一解:

$$\begin{aligned}J(x,t)=&I+\sum_{k=1}^{d}\int_0^t A_k^{(1)}(X(x,s))J(x,s)\cdot dW_s^k\\&+\int_0^t A_0^{(1)}(X(x,s))J(x,s)ds,\qquad t\in\mathbb{R}_+,\end{aligned}\tag{23.10}$$

其中 $A_0^{(1)}(x) \equiv (\partial_j b^i(x))_{1\le i,j\le m}$, $A_k^{(1)}(x) \equiv (\partial_j \sigma_k^i(x))_{1\le i,j\le m}$ $(k=1,2,\cdots,d)$.

证 先假定系数直到 k 阶偏导数均有界. 对 $j=1,2,\cdots,m$, 令 $e_j \equiv (0,\cdots,1,0,\cdots 0)$ 为 j 方向单位向量, $x' = x + he_j (h \neq 0)$,

$$Y(x,x',t) \equiv h^{-1}(X(x',t) - X(x,t)), \tag{23.11}$$

则 Y 满足以下方程:

$$\begin{aligned} Y(x,x',t) = e_j &+ \int_0^t h^{-1}[b(X(x',s)) - b(X(x,s))]ds \\ &+ \int_0^t h^{-1}[\sigma(X(x',s)) - \sigma(X(x,s))] \cdot dW_s \\ = e_j &+ \int_0^t \Big(\int_0^1 A_0^{(1)}(X(x,s) + \theta(X(x',s) \\ &- X(x,s)))d\theta\Big) Y(x,x',s)ds \\ &+ \sum_{k=1}^d \int_0^t \Big(\int_0^1 A_k^{(1)}(X(x,s) + \theta(X(x',s) \\ &- X(x,s)))d\theta\Big) Y(x,x',s) \cdot dW^k. \end{aligned} \tag{23.12}$$

将此方程看成关于 $\mathbb{R}^{3m}$ 值过程:

$$Z(x,x',t) \equiv (X(x,t), X(x',t), Y(x,x',t))$$

的随机微分方程, 因为系数满足 Lipschitz 条件, 由定理 23.4, 存在等价形使其解关于 (x,x',t) 在 $\mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}_+$ 连续. 特别, 当 $h \longrightarrow 0$ 时, $x' \longrightarrow x$, 在 (23.11) 中极限存在, 亦即 $\partial_j X(x,t)$ 存在, 且对 a.a.ω, 关于 (x,t) 连续. 在 (23.12) 中令 $h \longrightarrow 0$, 即得 (23.10).

再考虑关于 $(X(x,t), \partial_j X(x,t))$ 的联立方程 (21.1) 及 (23.10), 其系数 $k-1$ 次连续可微且直到 $k-1$ 阶偏导数有界, 同样讨论可知具有连续二阶导数. 如此下去, 直到 $k-1$ 阶导数.

由于 $X(x,t)$ 关于 x 的光滑性为局部性质, 因而导数有界性的限制实际上可以取消. 例如, 当 b 的各阶导数未必有界时, 总可选

具有各阶有界连续导数的系数 b_n, 使当 $|x| \le n$ 时有 $b_n(x) = b(x)$, 令 $\tau_n \equiv \inf\{t; |X(x,t)| \ge n\}$, 则由 b_n 得到的解 $X^{(n)}$ 在 τ_n 之前与 X 一致, 由于 $\tau_n \uparrow \infty$, 故仍有定理结论.

为证逆映象 $X(\cdot,t)^{-1}$ 的光滑性, 只须证明: 对 a.a.ω, $J(x,t,\omega)$ 对 $\forall(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$ 非奇异. 对 $x \in \mathbb{R}^m$, 考虑以下 (矩阵值) 随机微分方程:

$$dK_t = -\sum_{k=1}^{d} K_t A_k^{(1)}(X_t) \cdot dW_t^k - K_t A_0^{(1)}(X_t)dt + \sum_{k=1}^{d} K_t [A_k^{(1)}(X_t)]^2 dt, \qquad K_0 = I. \tag{23.13}$$

由伊藤公式:

$$d(K_tJ_t) = (dK_t)\cdot J_t + K_t \cdot dJ_t + (dK_t)\cdot(dJ_t) \tag{23.14}$$

以 (23.10) 及 (23.13) 代入上式可证右边为 0, 因而 $K_tJ_t \equiv I$, 故 J_t 非奇异. 由逆映象定理可知 $X(\cdot,t)^{-1}$ 仍为 C^{k-1} 级连续可微映象, 定理证毕.

推论 设方程 (21.1) 的系数为 C^∞ 函数且一切偏导数有界. 则其唯一解 $X = X(x,t,\omega)$ 对 a.a.ω 及 $\forall t \in \mathbb{R}_+, x \longmapsto X(x,t,\omega)$ 为 $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的 C^∞- 微分同胚.

习题 4.6 证明 (23.14) 右边为 0.

习题 4.7 证明在定理 23.11 中, 若系数各阶偏导数增长的阶不超过多项式的增长, 则对 $p \ge 2, T > 0$ 及 $R > 0$ 有

$$\sup_{|x|\le R} \mathbb{E}[\max_{|\alpha|\le k} \sup_{0\le t\le T} |\partial_\alpha X(x,t)|^p] < \infty, \tag{23.15}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为 m 重指数, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \partial_\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_m^{\alpha_m} (\alpha_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, 2, \cdots m)$.

习题 4.8 设方程 (21.1) 的系数三次连续可微且所有一阶偏导数有界. $X = X(x,t,\omega)$ 为其唯一解. 设 $U \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^m), z_0 \in \mathbb{R}^m$,

$$Z_t = z_0 + \int_0^t U_s ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

求证过程：

$$Y_t \equiv X(Z_t, t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为连续半鞅，且满足以下方程：

$$Y_t = z_0 + \int_0^t b(Y_s)ds + \int_0^t \sigma(Y_s) \cdot dW_s + \int_0^t J(Z_s, s)U_s ds$$
$$t \in \mathbb{R}_+, \tag{23.16}$$

其中 $J(x,t) \equiv (\partial_j X^i(x,t))_{1\le i,j\le m}$.

§24. 偏微分方程的概率解法

在引论中我们已经提到过二阶偏微分方程和扩散过程的深刻联系. 其实这种联系是早已为人们所熟知的 (例如，可以回溯到 1931 年， Kolmogorov). 不过在 40 年代以前，人们只是利用偏微分方程理论来研究扩散过程; 只是在伊藤清等创立了随机微分方程理论之后，才有了一种方法，直接构造扩散过程的轨道，因此也提供了一种可能性，用概率方法去研究偏微分方程. 正如在变分学的直接方法发现之前，人们只是用微分方程理论来研究变分问题; 而在人们找到了解决变分问题的直接方法之后，就发展了解微分方程的变分方法一样.

本节中我们仍然考虑微分算子：

$$L \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^m b^i(x)\partial_i, \tag{24.1}$$

其中 $a(x) = (a^{ij}(x))_{1\le i,j\le m}$ 为对称非负定矩阵 (对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$), 即 L 为 (可能退化的) 椭圆微分算子.

考虑如下抛物型方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = (Lu)(t,x), \qquad t > 0, \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{24.2}$$

分析学家已经证明：当系数 $a(x)$ 及 $b(x)$ 有界并充分光滑时，对 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, (24.2) 存在唯一解 $u(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m) \bigcap C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ (即对 t 一次，对 x 二次连续可微的有界连续函数类). 我们的目的是要不依赖于偏微分方程理论的任何结果，用概率方法来证明这一结论，并证明其唯一解可表示为

$$u_\varphi(t,x) = \mathbb{E}[\varphi(X(x,t))], \tag{24.3}$$

其中 $X = X(x,t)$ 为以下随机方程的解：

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t) \cdot dW_t, & t \in \mathbb{R}_+, \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{24.4}$$

而 $\sigma : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 为足够光滑的函数，满足 $\sigma\sigma^* = a$. 我们有以下定理：

定理 24.1 设 $b \in C_b^3(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m), \sigma \in C_b^3(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$. 则由 (24.3) 所定义的函数 $u_\varphi(t,x)$ 为 Cauchy 问题 (24.2) 在函数类 $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m) \bigcap C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ 中的唯一解.

证 由 σ 及 b 的一阶偏导数有界，故满足 Lipschitz 条件，因而方程 (24.4) 存在唯一强解 $X = X(x,t,\omega)$, 且对 a.a.ω, $X(x,t,\omega)$ 关于 (x,t) 连续，由定理 23.11, 它关于 x 二次连续可微；由习题 4.7, 对 $k = 3$ 满足 (23.15) 式.

任意固定 $x \in \mathbb{R}^m$, 对 $r > 0$ 令

$$\tau_r \equiv \inf\{t; |X(x,t) - x| \geq r\}.$$

设 $u(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m) \bigcap C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ 为 Cauchy 问题 (24.2) 的解. 任意固定 $T > 0$, 对 $u(T-t, X(x,t))$ 应用伊藤公式得

$$\begin{aligned} u(T-t, X(x,t)) &= u(T,x) + \int_0^t \left(Lu - \frac{\partial u}{\partial s}\right)(T-s, X(x,s))ds \\ &+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sigma_j^i(X(x,s))\partial_i u(T-s, X(x,s))\right)dW_s^j, \\ &\qquad 0 \leq t \leq T, \qquad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{24.5}$$

在上式中以 $t\wedge\tau_r$ 代 t, 因 u 为 (24.2) 的解，右边第二项为 0, 第三项中被积过程有界，因而

$$u(T-t\wedge\tau_r, X(x,t\wedge\tau_r))-u(T,x), \qquad 0\le t\le T$$

为零初值连续鞅，特别取 $t=T$ 得

$$\mathbb{E}[u(T-T\wedge\tau_r, X(x,T\wedge\tau_r))]=u(T,x), \qquad T>0.$$

令 $r\longrightarrow\infty$, 此时有 $\tau_r\uparrow\infty$ a.s., 由有界收敛性定理得

$$\begin{aligned}u(T,x)&=\mathbb{E}[u(0,X(x,T))]\\&=\mathbb{E}[\varphi(X(x,T))], \qquad T>0, x\in\mathbb{R}^m,\end{aligned}$$

和 (24.3) 定义的函数重合，得证唯一性.

现证由 (24.3) 所定义的函数 $u_\varphi(t,x)\in C^{1,2}\bigcap C_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m)$, 且为 Cauchy 问题 (24.2) 的解.

由 $\varphi\in C_b^2(\mathbb{R}^m), X(x,t)$ 关于 x 二次连续可微且其偏导数满足 (23.15) 式，可知 (24.3) 可在积分号下关于 x 连续求两次偏导数，因此

$$u_\varphi\in C^{0,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m)\cap C_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m),$$

对任意固定 $t>0, u_\varphi(t,\cdot)\in C^2(\mathbb{R}^m)\bigcap C_b(\mathbb{R}^m)$, 由伊藤公式，对 $h>0$ 及 $r>0$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[u_\varphi(t,X(x,h\wedge\tau_r))]-u_\varphi(t,x)\\&=\mathbb{E}\Big[\int_0^{h\wedge\tau_r}(Lu_\varphi)(t,X(x,s))ds\Big].\end{aligned} \tag{24.6}$$

根据扩散过程 X 的强 Markov 性可知

$$u_\varphi(t,X(x,h\wedge\tau_r))=\mathbb{E}[\varphi(X(x,t+h\wedge\tau_r))|\mathcal{F}_{h\wedge\tau_r}] \qquad \text{a.s.},$$

因而

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[u_\varphi(t,X(x,h\wedge\tau_r))]\\&=\mathbb{E}[\varphi(X(x,t+h\wedge\tau_r))]\\&=\mathbb{E}[\varphi(X(x,t+h))\mathbf{1}_{(\tau_r>h)}]+\mathbb{E}[\varphi(X(x,t+\tau_r))\mathbf{1}_{(\tau_r\le h)}],\end{aligned}$$

如果我们能证明：当 $h\downarrow 0$ 时有

$$P[\tau_r \le h]/h \longrightarrow 0, \tag{24.7}$$

则在 (24.6) 式两边除以 h, 令 $h\downarrow 0$, 由 $\tau_r > 0$ a.s., 故有

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}[u_\varphi(t+h,x) - u_\varphi(t,x)] = (Lu_\varphi)(t,x),$$

即 u_φ 为 Cauchy 问题 (24.2) 之解.

剩下要证明 (24.7). 设

$$|b|_r \equiv \sup\{|b(y)|;\ |y-x| \le r\},$$

$$\|\sigma\|_r \equiv \sup\{\|\sigma(y)\|; |y-x| \le r\}.$$

对 $\theta \in \mathbb{R}^m$, 由伊藤公式可知

$$Z_t^\theta \equiv \exp\Big\{(\theta, X_{t\wedge\tau_r} - x - \int_0^{t\wedge\tau_r} b(X_s)ds)$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_r} |\sigma(X_s)^*\theta|^2 ds\Big\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

为连续鞅，且 $\mathbb{E}[Z_t^\theta] \equiv 1$. 特别取 $\theta \in S^{m-1}$($\mathbb{R}^m$ 中单位球面) 及 $\lambda > 0, R > r$, 由 Doob 不等式得

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le h} (\theta, X_{t\wedge\tau_R} - x) \ge rm^{-\frac{1}{2}}\Big\}$$
$$\le P\Big\{\sup_{0\le t\le h} Z_t^{\lambda\theta} \ge \exp\Big[\lambda(rm^{-\frac{1}{2}} - h|b|_R) - \frac{\lambda^2}{2}h\|\sigma\|_R^2\Big]\Big\}$$
$$\le \exp\Big\{-\lambda(rm^{-\frac{1}{2}} - h|b|_R) + \frac{\lambda^2}{2}h\|\sigma\|_R^2\Big\},$$

当 h 足够小使 $r > m^{\frac{1}{2}}h|b|_R$ 时，取 $\lambda = (rm^{-\frac{1}{2}} - h|b|_R)/h\|\sigma\|_R^2$ 得

$$P\Big\{\sup_{0\le t\le h} (\theta, X_{t\wedge\tau_R} - x) \ge rm^{-\frac{1}{2}}\Big\}$$
$$\le \exp\{-(rm^{-\frac{1}{2}} - h|b|_R)^2/2h\|\sigma\|_R^2\}.$$

选 $\theta_1,\cdots,\theta_m\in S^{m-1}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 之正交基，则

$$\begin{aligned}
P\{\tau_r\le h\}&=P\Big\{\sup_{0\le t\le h}|X_t-x|\ge r\Big\}\\
&\le\sum_{i=1}^m P\Big\{\sup_{0\le t\le h}(\theta_i,X_{t\wedge\tau_R}-x)\ge rm^{-\frac12}\Big\}\\
&\le m\exp\{-(rm^{-\frac12}-h|b|_R)^2/2h\|\sigma\|_R^2\},
\end{aligned}$$

因而得证 (24.7) 式.

下面对定理 24.1 作一推广. 设 $v:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ 为一足够光滑的有界函数, 考虑微分算子:

$$(\widetilde{L}f)(x)\equiv(Lf)(x)+v(x)f(x)\tag{24.8}$$

及 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)=(\widetilde{L}u)(t,x), & t>0,\\ u(0,x)=\varphi(x),\end{cases}\tag{24.9}$$

则我们有以下的 **Feynman-Kac 公式**:

定理 24.2 在定理 24.1 的假定下, 若 $v\in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, 则

$$u_\varphi(t,x)\equiv\mathbb{E}\Big[\varphi(X(x,t))\exp\Big\{\int_0^t v(X(x,s))ds\Big\}\Big]\tag{24.10}$$

为 Cauchy 问题 (24.9) 在函数类 $C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m)\bigcap C_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m)$ 中的唯一解.

证 证明方法如同定理 24.1. 其中 (24.5) 代之以

$$\begin{aligned}
&u(T-t,X(x,t))\exp\Big\{\int_0^t v(X(x,s))ds\Big\}=u(T,x)\\
&+\int_0^t\exp\Big\{\int_0^s v(X(x,s')ds'\Big\}\Big(\widetilde{L}u-\frac{\partial u}{\partial s}\Big)(T-s,X(x,s))ds\\
&+\sum_{j=1}^d\int_0^t\exp\Big\{\int_0^s v(X(x,s')ds'\Big\}\Big[\sum_{i=1}^m\sigma_j^i(X(x,s))\partial_i u(T-s,\\
&\qquad X(x,s))\Big]dW_s^j;
\end{aligned}$$

(24.6) 代之以:

$$\mathbb{E}\Big[u_\varphi(t,X(x,h\wedge\tau_r))\exp\Big\{\int_0^{h\wedge\tau_r} v(X(x,s))ds\Big\}\Big]-u_\varphi(t,x)$$
$$=\mathbb{E}\Big[\int_0^{h\wedge\tau_r}\exp\Big\{\int_0^{s} v(X(x,s'))ds'\Big\}\Big(\widetilde{L}u_\varphi\Big)(t,X(x,s))ds\Big].$$

其余证明留给读者.

习题 4.9 证明 Feynman-Kac 公式 (24.10).

显然, 定理 24.1 及 24.2 中的条件还可以减弱, 我们不在此详细讨论. 值得注意的是, 上述条件只是对 σ 而不是对 $a=\sigma\sigma^*$ 给出. 一般说来, a 比 σ 更光滑. 当 a 一致正定时, 可选 $\sigma=a^{\frac{1}{2}}$ 为其对称正定平方根, 此时 σ 可以和 a 同样光滑. 当 a 退化时 (这恰恰是我们感兴趣的情形) 就未必能选择同样光滑的 σ, 使 $\sigma\sigma^*=a$. 但我们有以下结果:

定理 24.3 设 $a\in C_b^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^m)$ 为对称非负定矩阵值函数, 则其对称非负定平方根 $\sigma=a^{\frac{1}{2}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为 Lipschitz 连续; 若 $a\in C^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^m)$, 则 σ 为局部 Lipschitz 连续.

证 后一结论容易由前一结论推出. 为证前一结论, 不妨设 $d=1$ (因为, 若函数对每个自变量满足 Lipschitz 条件, 其 Lipschitz 常数不依赖于其他自变量, 则此函数在 $\mathbb{R}^d$ 上为 Lipschitz 连续).

固定 $x_0\in\mathbb{R}^1$, 选择正交矩阵 Q, 使 $Qa(x_0)Q^*$ 为对角形矩阵. 令 $\widetilde{a}(x)=Qa(x)Q^*$. 对正数 ε, 令

$$a_\varepsilon(x)=a(x)+\varepsilon I,$$
$$\widetilde{a}_\varepsilon(x)=Qa_\varepsilon(x)Q^*=\widetilde{a}(x)+\varepsilon I,$$

其平方根分别记为 $\sigma_\varepsilon(x)$ 及 $\widetilde{\sigma}_\varepsilon(x)(=Q\sigma_\varepsilon(x)Q^*)$. 显然 σ_ε 及 $\widetilde{\sigma}_\varepsilon\in C_b^2(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^m)$, 对下式:

$$\widetilde{a}_\varepsilon(x)=\widetilde{\sigma}_\varepsilon(x)\widetilde{\sigma}_\varepsilon(x)$$

在 $x=x_0$ 处进行微分, 因 $\widetilde{\sigma}_\varepsilon(x_0)$ 为对角形矩阵, 故

$$\dot{\widetilde{a}}_\varepsilon^{ij}(x_0)=(\widetilde{\sigma}_\varepsilon^{ii}(x_0)+\widetilde{\sigma}_\varepsilon^{jj}(x_0))\dot{\widetilde{\sigma}}_\varepsilon^{ij}(x_0),\qquad i,j=1,\cdots,m,\quad(24.11)$$

其中“·”表示对 x 的导数. 令

$$K \equiv \max_{1\le i,j\le m} \sup_{x\in \mathbb{R}} \left|\ddot{\tilde{a}}^{ij}(x)\right|,$$

对 $\theta \in \mathbb{R}^m$, 令 $f(x) \equiv (\theta, \tilde{a}_\varepsilon(x)\theta)$, 由于 f 非负, 故

$$\begin{aligned}0 &\le f(x+h) = f(x) + \dot{f}(x)h + \frac{1}{2}\ddot{f}(x+\alpha h)h^2 \\ &\le f(x) + \dot{f}(x)h + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}|\theta_i|\Big)^2 Kh^2 \qquad (0\le\alpha\le1),\end{aligned}$$

上述关于 h 的二次三项式判别式非正, 故

$$(\dot{f}(x))^2 \le 2f(x)\Big(\sum_{i=1}^{m}|\theta_i|\Big)^2 K.$$

分别取 $\theta = e_i$(i 方向单位矢量), e_j 及 $e_i + e_j$, 得

$$\Big(\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{ii}(x)\Big)^2 \le 2K\tilde{a}_\varepsilon^{ii}(x), \Big(\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{jj}(x)\Big)^2 \le 2K\tilde{a}_\varepsilon^{jj}(x)$$

及

$$\begin{aligned}&\Big(\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{ii}(x) + 2\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{ij}(x) + \dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{jj}(x)\Big)^2 \\ &\le 8K\Big(\tilde{a}_\varepsilon^{ii}(x) + 2\tilde{a}_\varepsilon^{ij}(x) + \tilde{a}_\varepsilon^{jj}(x)\Big),\end{aligned}$$

由于 $\Big(\tilde{a}_\varepsilon^{ij}(x)\Big)^2 \le \tilde{a}_\varepsilon^{ii}(x)\tilde{a}_\varepsilon^{jj}(x)$, 故存在不依赖于 ϵ 及 x 的常数 $C = C(K)$, 使

$$\left|\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{ij}(x)\right| \le C\Big\{\Big(\tilde{a}_\varepsilon^{ii}(x)\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\tilde{a}_\varepsilon^{jj}(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

在上式中令 $x = x_0$, 得

$$\left|\dot{\tilde{a}}_\varepsilon^{ij}(x_0)\right| \le C\Big\{\tilde{\sigma}_\varepsilon^{ii}(x_0) + \tilde{\sigma}_\varepsilon^{jj}(x_0)\Big\},$$

比较 (24.11) 式, 可知 $\left|\dot{\tilde{\sigma}}_{\varepsilon}^{ij}(x_0)\right| \le C$. 因为 $\sigma_{\varepsilon}^{ij}(x_0) = \left(Q^*\tilde{\sigma}_{\varepsilon}(x_0)Q\right)_{ij}$, 易见 $\left|\dot{\sigma}_{\varepsilon}^{ij}(x_0)\right| \le mC$. 但 x_0 是任意的, 故对一切 $x \in R^1$ 有 $\left|\dot{\sigma}_{\varepsilon}^{ij}(x)\right| \le mC$, 于是

$$|\sigma_{\varepsilon}^{ij}(x) - \sigma_{\varepsilon}^{ij}(y)| \le mC|x-y|,$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得

$$|\sigma^{ij}(x) - \sigma^{ij}(y)| \le mC|x-y|, \qquad i,j = 1,2,\cdots,m,$$

这就证明了定理.

下面我们考虑 Dirichlet 问题.

设 G 为 R^m 中的有界区域, 具有 C^2 类边界 ∂G(即每个边界点有一个邻域, 在其中 ∂G 为某个二次连续可微的 $m-1$ 元函数的图像), 记 $\overline{G} \equiv G \bigcup \partial G$.

在 G 中给出微分算子 (24.8) 及函数 f, 在 ∂G 上给出函数 φ, 考虑边值问题:

$$\begin{cases} \tilde{L}u(x) = f(x), & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G. \end{cases} \tag{24.12}$$

分析学家已经证明 (例如参看 Friedman[1]):

若 $a(x)$ 在 G 中一致正定 (即 $\exists \eta > 0$, 对 $\forall x \in G, y \in R^m$ 有: $(y, a(x)y) \ge \eta|y|^2$), 系数 $a(x)$ 及 $b(x)$ 在 $\overline{G}$ 中 Lipschitz 连续, $v(x) \le 0$, 且在 $\overline{G}$ 中为 α-Hölder 连续 ($\alpha > 0$), 则对一切在 $\overline{G}$ 中 α-Hölder 连续的函数 f 及 ∂G 上的连续函数 φ, 边值问题 (24.12) 在函数类 $C^2(G) \bigcap C^0(\overline{G})$ 中存在唯一解.

现在给出这个解的概率表示. 由于 $a(x)$ 一致正定且 Lipschitz 连续, 故其平方根 $\sigma(x) = a(x)^{\frac{1}{2}}$ 和 $a(x)$ 同样光滑, 因而在 $\overline{G}$ 中 Lipschitz 连续. 将 b 及 σ 保持 Lipschitz 连续性开拓到整个空间 R^m 上, 考虑随机微分方程 (24.4), 并记其唯一解为 $X = X(x,t)$. 以 τ 表示解的轨道首次跑出 G 的时刻:

$$\tau \equiv \inf\{t > 0;\ X(x,t) \overline{\in} G\}, \tag{24.13}$$

我们有以下定理:

定理 24.4 在上述条件下，Dirichlet 问题 (24.12) 的唯一解 u 由下式给出:

$$\begin{aligned}u(x)=&\mathbb{E}\Big[\varphi(X(x,\tau))\exp\Big\{\int_0^\tau v(X(x,s))ds\Big\}\Big]\\&-\mathbb{E}\Big[\int_0^\tau f(X(x,t))\exp\Big\{\int_0^t v(X(x,s))ds\Big\}dt\Big],\\&x\in G,\end{aligned}\tag{24.14}$$

其中 $X=X(x,t)$ 为方程 (24.4) 的解，τ 由 (24.13) 所定义.

证 对 $\varepsilon>0$, 以 V_ε 表示 ∂G 的闭 ε 邻域，并记 $G_\varepsilon\equiv G\setminus V_\varepsilon$. 设函数 $\widetilde{u}\in C^2(\mathbb{R}^m)$, 并在 $G_{\varepsilon/2}$ 中和 u 一致. 取 $x\in G_\varepsilon$, 以 τ_ε 表示 $X(x,t)$ 首达 V_ε 的时刻:

$$\tau_\varepsilon\equiv\inf\{t;X(x,t)\in V_\varepsilon\},$$

则 τ_ε 为停时，且当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时有 $\tau_\varepsilon\uparrow\tau$ a.s..

由伊藤公式，对 $\forall T>0$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[\widetilde{u}(X(x,\tau_\varepsilon\wedge T))\exp\Big\{\int_0^{\tau_\varepsilon\wedge T} v(X(x,s))ds\Big\}\Big]-\widetilde{u}(x)\\&=\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_\varepsilon\wedge T}(\widetilde{L}\widetilde{u}(X(x,t))\exp\Big\{\int_0^t v(X(x,s))ds\Big\}dt\Big],\end{aligned}$$

由于在 τ_ε 之前 $\widetilde{u}(X(x,t))$ 和 $u(X(x,t))$ 一致，所以在上式中 $\widetilde{u}$ 可代之以 u. 令 $\varepsilon\downarrow 0$, 由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}u(x)=&\mathbb{E}\Big[u(X(x,\tau\wedge T))\exp\Big\{\int_0^{\tau\wedge T} v(X(x,s))ds\Big\}\Big]\\&-\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau\wedge T} f(X(x,t))\exp\Big\{\int_0^t v(X(x,s))ds\Big\}dt\Big].\end{aligned}\tag{24.15}$$

如果我们证明了 $\mathbb{E}[\tau]<\infty$, 在上式中令 $T\uparrow\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理，并注意 $X(x,\tau)\in\partial G$, 因而 $u(X(x,\tau))=\varphi(X(x,\tau))$, 即得 (24.14) 式.

为证 $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, 考虑只依赖于第一个坐标 x_1 的函数 $\psi(x) = -ce^{\lambda x_1}(x \in G)$, 此时

$$(L\psi)(x) = \frac{1}{2}a^{11}(x)\partial_1\partial_1\psi(x) + b^1(x)\partial_1\psi(x)$$
$$= -\lambda ce^{\lambda x_1}\left(b^1(x) + \frac{\lambda}{2}a^{11}(x)\right).$$

由于 G 为有界区域, 上式当 λ 及 c 充分大时可使之不超过 -1. 根据伊藤公式:

$$\mathbb{E}[\psi(X(x, \tau \wedge T))] - \psi(x) \leq -\mathbb{E}[\tau \wedge T],$$

因 $\psi(x)$ 在 G 中有界, 例如说, $\sup_{x\in G}|\psi(x)| \leq K$. 则由上式可知, $\mathbb{E}[\tau \bigwedge T] \leq 2K$. 令 $T \uparrow \infty$, 由单调收敛定理得 $\mathbb{E}[\tau] \leq 2K$. 定理得证.

注 1 在证明 $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ 中只利用了 $a^{11}(x) > 0$. 若 $a(x)$ 不是一致正定 (仅仅非负定), 但在 $\overline{G}$ 的某一邻域中二次连续可微, 则由定理 24.3, 其平方根 $\sigma(x)$ 仍为 Lipschitz 连续, 此时 (24.14) 右边仍有意义.

特别, 当 $f \equiv 0, v \equiv 0$ 时, 我们得到 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu(x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G \end{cases} \tag{24.16}$$

的解

$$u(x) = \mathbb{E}[\varphi(X(x, \tau))]. \tag{24.17}$$

当 $v \equiv 0, \varphi \equiv 0, f \equiv -1$ 时, 得证 $u(x) \equiv \mathbb{E}_x[\tau]$ 满足方程 $Lu = -1$ 及边界条件 $u|_{\partial G} = 0$.

习题 4.10 设 $X(x,t)$ 为自 $x \in [c,d]$ 出发的一维扩散过程, 具有扩散系数 $a(x) > 0$ 及漂移系数 $b(x)$, τ 为此过程首次跑出 $[c,d]$ 的时刻. 试求概率 $P[X(x,\tau) = d]$.

(提示: 此概率 $p(x)$ 满足方程 $\frac{1}{2}a(x)p''(x) + b(x)p'(x) = 0$ 及边界条件 $p(c) = 0, p(d) = 1$).

习题 4.11 设 $X(x,t)=x+W_t$ 为平面上自 $x\in G$ 出发的 Brown 运动，$0<r<R<\infty$, G 为介于两个圆：$\partial_r\equiv\{x;|x|=r\}$ 及 $\partial_R\equiv\{x;|x|=R\}$ 之间的环形区域，τ 为 $X(x,t)$ 首次跑出 G 的时刻. 试证明

$$P[X(x,\tau)\in\partial_r]=(\log R-\log|x|)/(\log R-\log r).$$

利用 $R\longrightarrow\infty$ 求证此过程到达 ∂_r 的概率，并利用 $r\longrightarrow 0$ 求此过程到达 0 点的概率. 比较一维及三维 Brown 运动的类似情形.

注 2 在 Dirichlet 问题的解的概率表示 (24.14) 中，对于退化的椭圆算子 L, 无界甚至具有不光滑边界的区域都有意义. 此时边界 ∂G 的点分为两类：正则点和奇异点.

按照概率的定义，$x_0\in\partial G$ 若满足：$P_{x_0}\{\tau=0\}=1$, 称为 G 的 **正则点**; 若满足 $P_{x_0}\{\tau=0\}=0$, 称为 G^c 的 **奇异点**. 这里 τ 是扩散过程 X(或者 Brown 运动 W) 首次跑出区域 G 的时刻. (根据 Blumenthal $0-1$ 律，此概率或为 0 或为 1, 不能取 0 和 1 之间的任何数值). 如果边界光滑，按前所说，对 $\forall x_0\in\partial G$, 有 $E_{x_0}[\tau]=0$ (参看注 1), 因而一切边界点为正则点. 如果边界不光滑，以 S 表示其中奇异点的集合，则由扩散过程 X 的强 Markov 性，对 $A\in\mathcal{F}_\tau$ 及 $B\in\mathcal{F}_\infty^X$ 有

$$P_x(A\cap\theta_\tau^{-1}B)=\int_A P_{X(\tau)}(B)P_x(d\omega),\qquad x\in G.$$

在上式中令 $A=[X(\tau)\in S], B=[\tau>0]$, 则 $\theta_\tau^{-1}B=\theta_\tau^{-1}[\tau>0]=[\theta_\tau\tau>0]=[0>0]=\emptyset$, 上式左边为 0; 但若 $X(\tau)\in S$ 则 $P_{X(\tau)}(B)=1$, 故上式右边为 $P_x(A)$. 这样，就证明了 $P_x[X(\tau)\in S]=0$ 对 $\forall x\in G$ 均成立，也就是说，奇异点的集合是过程实际上不能到达的. 因此，在表达式 (24.14) 中，甚至容许函数 φ 在奇异点的集合上不连续. 而 Dirichlet 问题的提法是：对边界上一切正则点 x_0, 当 x 沿 G 内部趋向 x_0 时，有 $u(x)\longrightarrow\varphi(x_0)$.

关于微分方程的概率解法的详细讨论，可参看 Freidlin[2] 和 Friedman[1]. 在下一章，我们还要讨论抛物形方程基本解的光滑性质以及亚椭圆算子的 Hörmander 定理的概率方法证明.

§25. 半鞅随机微分方程，样本广义解

前面所讨论的随机微分方程，其驱动过程 (或输入过程) 是 Brown 运动. 这在应用中是有一定限制的. 自然地，我们可以研究其驱动过程为一般半鞅的随机微分方程. 在本节中，我们限于讨论由连续半鞅所驱动的方程.

假定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$ 满足通常条件. X 为 d 维连续 $\mathfrak{F}$ 半鞅，$\sigma(x) = (\sigma^i_j(x))_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上局部有界 Borel 可测函数矩阵. 考虑下面关于未知 m 维连续 $\mathfrak{F}$ 适应过程 Y 的方程:

$$dY_t = \sigma(Y_t)\cdot dX_t, \qquad Y_0 = y \in \mathbb{R}^m. \tag{25.1}$$

若存在 m 维连续半鞅 Y, 使对 $\forall t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$Y_t = y + \int_0^t \sigma(Y_s)\cdot dX_s \qquad \text{a.s.}, \tag{25.2}$$

则称 Y 为方程 (25.1) 的一个解；若方程 (25.1) 的任意两个解均无区别，则称此方程有唯一解. 我们有以下关于解的存在性及唯一性定理:

定理 25.1 若 $\sigma(x)$ 满足 Lipschitz 条件，即存在 $K>0$, 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ 均有

$$\|\sigma(x)-\sigma(y)\|^2 \le K|x-y|^2, \tag{25.3}$$

则对任一初值 $y \in \mathbb{R}^m$, 方程 (25.1) 存在唯一解.

证 不失一般性可假定 $m=1$, 且 (25.1) 为如下形式:

$$dY_t = b(Y_t)dV_t + \sigma(Y_t)\cdot dM_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{25.4}$$

其中 M 为连续局部鞅，V 为连续有限变差过程，b 和 σ 满足 Lipschitz 条件．问题是寻求连续半鞅 Y，满足：对 $\forall t\in \mathbb{R}_+$

$$Y_t = y + \int_0^t b(Y_s)dV_s + \int_0^t \sigma(Y_s)dM_s \qquad \text{a.s..} \tag{25.5}$$

记 V 的全变差过程为 $\overline{V}$，设 $\phi(t)\equiv t+[M]_t+\overline{V}_t$，则 ϕ 为连续增过程，且 $\phi(t)\uparrow\uparrow\infty\ (t\uparrow\infty)$．对 (25.5) 式作随机时刻变换 T^ϕ(参看 §14)，得

$$\widetilde{Y}_t = y + \int_0^t b(\widetilde{Y}_s)d\widetilde{V}_s + \int_0^t \sigma(\widetilde{Y}_s)\cdot d\widetilde{M}_s \qquad \text{a.s.,} \tag{25.6}$$

其中 $\widetilde{Y}=T^\phi Y$，$\widetilde{V}=T^\phi V,\widetilde{M}=T^\phi M$．于是问题归结为证明方程 (25.6) 存在唯一解 $\widetilde{Y}$．

因为 $[\widetilde{M}]_t=[M]_{\phi^{-1}(t)}$，$\overline{\widetilde{V}}_t=\overline{V}_{\phi^{-1}(t)}$，

$$\begin{aligned} t &= \phi\circ\phi^{-1}(t)=\phi^{-1}(t)+[M]_{\phi^{-1}(t)}+\overline{V}_{\phi^{-1}(t)} \\ &= \phi^{-1}(t)+[\widetilde{M}]_t+\overline{\widetilde{V}}_t, \end{aligned}$$

所以 $t\longmapsto t-[\widetilde{M}]_t-\overline{\widetilde{V}}_t$ 为 t 的增函数，因而

$$d[\widetilde{M}]_s\le ds, \qquad d\overline{\widetilde{V}}_s\le ds \qquad \text{a.s..} \tag{25.7}$$

如同定理 19.3 的证明一样，利用逐次逼近法，并注意到 (25.7)，不难证明解的存在性和唯一性，其详细证明留给读者．

再考虑 Fisk-Stratonovich 随机微分方程．

定理 25.2 设 $\sigma\in C_b^2(\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d)$，则对任一连续半鞅 $X=(X^1,X^2,\cdots,X^d)$ 及 $y\in\mathbb{R}^m$，以下方程存在唯一解 $Y=(Y^1,Y^2,\cdots,Y^m)$:

$$dY_t=\sigma(Y_t)\circ dX_t, \qquad Y_0=y, \tag{25.8}$$

其中“$\circ$”表示对称 Q 乘 (参看 §14)．

证 由随机微分规则，(25.8) 等价于如下伊藤随机微分方程：

$$dY_t^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j^i(Y_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(d\sigma_j^i(Y_t) \cdot dX_t^j) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{25.9}$$

而

$$d\sigma_j^i(Y_t) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k \sigma_j^i(Y_t) \cdot dY_t^k + \text{二阶项},$$

$$dY_t^k \cdot dX_t^j = \sum_{l=1}^{d} \sigma_l^k(Y_t) \cdot dX_t^l \cdot dX_t^j \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, d).$$

代入 (25.9) 式得

$$dY_t^i = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j^i(Y_t) \cdot dX_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d}\sum_{k=1}^{m}(\sigma_l^k \cdot \partial_k \sigma_j^i)(Y_t) \cdot dX_t^l \cdot dX_t^j \qquad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{25.10}$$

此方程为 (25.1) 的特殊情形，其驱动过程为 dX^j 及 $dX^l \cdot dX^j$，系数 σ_j^i 及 $\sum_{k=1}^m \sigma_l^k \cdot \partial_k \sigma_j^i$ 由定理假设均满足 Lipschitz 条件，因而存在唯一解.

关于随机微分方程的求解，Doss[1], Sussmann[1] 和 Krasnosel'ski-Pokrovski[1] 提出了一种方法，将其化为一组含参数的常微分方程来研究. 我们先看一维情形：

例 4.6 考虑一维 Fisk-Stratonovich 随机微分方程：

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t) \circ dX_t, \qquad Y_0 = y \in \mathbb{R}, \tag{25.11}$$

其中 X 为连续半鞅，$X_0 = 0$, $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R})$, b 满足 Lipschitz 条件. 由定理 25.2, 此方程存在唯一解. 我们先考虑如下常微分方程初值问题：

$$\frac{dy}{dx} = \sigma(y), \qquad y(0) = \xi \in \mathbb{R}. \tag{25.12}$$

因为 $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R})$, 根据常微分方程理论可知存在唯一解，且作为初值的函数是二次连续可微的，即 $y = \Phi(x, \xi) \in C^{3,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. (25.12) 化为

$$\partial_x \Phi = \sigma(\Phi), \qquad \Phi(0, \xi) = \xi,$$

将上式对 ξ 求偏导数，得到关于 $\partial_\xi \Phi$ 的方程:

$$\partial_x \partial_\xi \Phi = \sigma'(\Phi)\partial_\xi \Phi, \qquad \partial_\xi \Phi(0, \xi) = 1,$$

其解为

$$\partial_\xi \Phi(x, \xi) = \exp\left\{ \int_0^x \sigma'(\Phi(s, \xi))ds \right\}.$$

再考虑如下含参数 ω 的常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_t = \exp\left\{ -\int_0^{X(t,\omega)} \sigma'(\Phi(s, \xi_t))ds \right\} b(\Phi(X(t,\omega), \xi_t)) \\ \xi_0 = y, \end{cases} \tag{25.13}$$

在所给条件下容易证明此方程存在唯一解 $\xi = \xi(t, \omega)$, 且为连续适应过程. 现在要证明

$$Y_t(\omega) \equiv \Phi(X_t(\omega), \xi_t(\omega)) \tag{25.14}$$

为方程 (25.11) 的唯一解. 根据对称随机微分规则 (注意此时 $\Phi \in C^{3,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 且 $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为有限变差过程)

$$\begin{aligned} dY_t &= \partial_x \Phi(X_t, \xi_t) \circ dX_t + \partial_\xi \Phi(X_t, \xi_t)d\xi_t \\ &= \sigma(Y_t) \circ dX_t + b(Y_t)dt, \end{aligned}$$

且显然有 $Y_0 = \Phi(0, y) = y$. 因而 (25.14) 为方程 (25.11) 的唯一解.

例 4.7 考虑一维伊藤方程:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t) \cdot dW_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}, \tag{25.15}$$

其中 W 为一维 Brown 运动，$\sigma \in C_b^1(\mathbb{R}), b$ 满足 Lipschitz 条件. 先解以下常微分方程初值问题:

$$\frac{dy}{dw} = \sigma(y), \qquad y(0) = \xi \in \mathbb{R}, \tag{25.16}$$

其解 $y=\Phi(w,\xi)\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, (25,16) 化为

$$\partial_w\Phi=\sigma(\Phi),\qquad \Phi(0,\xi)=\xi. \tag{25.17}$$

将上式对 ξ 求偏导数，可得关于 $\partial_\xi\Phi$ 的方程，其解为

$$\partial_\xi\Phi(w,\xi)=\exp\left\{\int_0^w\sigma'(\Phi(s,\xi))ds\right\}, \tag{25.18}$$

将 (25.17) 对 w 求偏导数，可得

$$\partial_w\partial_w\Phi(w,\xi)=(\sigma\sigma')(\Phi(w,\xi)). \tag{25.19}$$

再解以下含参数 ω 的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases}\dot{\xi}_t=\exp\left\{-\int_0^{W_t(\omega)}\sigma'(\Phi(s,\xi_t))ds\right\}\left(b-\frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)(\Phi(W_t(\omega),\xi_t)),\\ \xi_0=x,\end{cases} \tag{25.20}$$

容易看出，对每一固定参数 ω, 此方程存在唯一解 $\xi=\xi(t,\omega)$, 且 $\{\xi_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ 为连续适应有限变差过程 (详细证明可参看 Doss[1] 及黄志远、许明浩、胡则成 [1]). 我们来验证：

$$X_t(\omega)\equiv\Phi(W_t(\omega),\xi_t(\omega)) \tag{25.21}$$

确实是伊藤方程 (25.15) 的解.

因为 $\Phi\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, 而 ξ_t 为有限变差过程，故可对 (25.21) 应用伊藤公式，根据伊藤微分法则有

$$\begin{aligned}dX_t=&\ \partial_w\Phi(W_t,\xi_t)\cdot dW_t+\partial_\xi\Phi(W_t,\xi_t)d\xi_t\\&+\frac{1}{2}\partial_w\partial_w\Phi(W_t,\xi_t)dt,\end{aligned}$$

由 (25.18) 及 (25.19) 得

$$\begin{aligned}dX_t&=\sigma(X_t)\cdot dW_t+\left(b-\frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)(X_t)dt+\frac{1}{2}(\sigma\sigma')(X_t)dt\\&=\sigma(X_t)\cdot dW_t+b(X_t)dt,\end{aligned}$$

且显然有 $X_0=\Phi(0,x)=x$. 因而由 (25.21) 所定义的过程确实是 (25.15) 的解.

注意由方程 (25.16) 解的唯一性质，有

$$\xi=\Phi(-w,\Phi(w,\xi)), \tag{25.22}$$

因此

$$\xi_t(\omega)=\Phi(-W_t(\omega),X_t(\omega)), \tag{25.23}$$

即 X 和 ξ 相互单值唯一确定.

我们还注意到，在方程 (25.13) 或 (25.20) 中并不出现对 X_t 或 W_t 的微分，因而当 X_t 或 W_t 为任一连续过程 (不必为半鞅) 时均有意义. 因此，只要方程 (25.16) 和 (25.20)(或 (25.12) 和 (25.13)) 有解，我们就称 (25.21)(或 (25.14)) 为方程 (25.15)(或方程 (25.11)) 的**样本广义解**.

更一般地，我们有如下结果:

设 G 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ 中某个区域， $b=b(t,w,x)$ 和 $\sigma=\sigma(t,w,x)$ 为在 G 中定义且连续的两个函数， W 为一维 Brown 运动， η 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量. 考虑如下的一维随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t=b(t,W_t,X_t)dt+\sigma(t,W_t,X_t)\cdot dW_t, \\ X_0=\eta, \qquad 0\le t<\zeta, \end{cases} \tag{25.24}$$

其中 $(0,0,\eta)\in G$, a.s., 且

$$\zeta=\inf\{t;(t,W_t,X_t)\overline{\in}G\}. \tag{25.25}$$

我们先解以下的常微分方程初值问题:

$$\frac{dy}{dw}=\sigma(t,w,y), \qquad y(0)=\xi, \tag{25.26}$$

其中 t 为参数， w 为自变量. 若 $\sigma\in C^2(G)$, 则存在唯一解 $y=\Phi(t,w,\xi)\in C^2(\widetilde{G})$, 其中 $\widetilde{G}$ 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ 中某个区域. 令

$$g(t,\xi,\omega)\equiv\Phi_\xi^{-1}\Big[b-\frac{1}{2}(\sigma_w+\sigma_x\sigma)-\Phi_t\Big], \tag{25.27}$$

其中下标 ξ, w, x, t 分别表示对 ξ, w, x, t 的偏导数，右边函数中的变量 w 及 x 分别以 $W(t,\omega)$ 及 $\Phi(t, W(t,\omega),\xi)$ 代替.

再解以下以 ω 为参数的常微分方程初值问题：

$$\frac{d\xi_t}{dt} = g(t,\xi_t,\omega), \qquad \xi(0) = \eta(\omega). \tag{25.28}$$

若 b 满足关于变量 x 的局部 Lipschitz 条件，则上述初值问题存在唯一解 $\xi = \xi(t,\omega), 0 \le t < \zeta(\omega)$.

我们有以下定理：

定理 25.3 设 $\sigma \in C^2(G), b \in C^0(G)$ 且在 G 中关于 x 局部 Lipschitz 连续. 则方程 (25.24) 存在唯一强解：

$$X(t,\omega) = \Phi(t, W(t,\omega), \xi(t,\omega)), \qquad 0 \le t < \zeta(\omega), \tag{25.29}$$

其中 Φ 与 ξ 分别为 (25.26) 及 (25.28) 的解，ζ 由 (25.25) 确定.

证 易见 ξ_t 为连续适应过程，选一列紧集 $K_n \uparrow G$, 定义

$$\zeta_n(\omega) \equiv \inf\{t > 0; (t, W(t,\omega)\ \Phi(t, W_t(\omega), \xi(t,\omega))) \overline{\in} K_n\},$$

则 $\{\zeta_n\}$ 为一列停时，且 $\zeta_n \uparrow \zeta$ a.s..

应用伊藤公式于过程

$$X(t\wedge\zeta_n) = \Phi(t\wedge\zeta_n, W(t\wedge\zeta_n), \xi(t\wedge\zeta_n)), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

可得

$$\begin{aligned}
X(t\wedge\zeta_n) - \eta &= \int_0^{t\wedge\zeta_n} \Phi_w(s, W_s, \xi_s) dW_s \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\zeta_n} \left(\frac{1}{2}\Phi_{ww} + \Phi_t\right)(s, W_s, \xi_s) ds + \int_0^{t\wedge\zeta_n} \Phi_\xi(s, W_s, \xi_s) d\xi_s \\
&= \int_0^{t\wedge\zeta_n} \sigma(s, W_s, X_s) dW_s + \int_0^{t\wedge\zeta_n} \frac{1}{2}(\sigma_w + \sigma_x\sigma)(s, W_s, X_s) ds \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\zeta_n} (\Phi_t(s, W_s, \xi_s) + \Phi_\xi(s, W_s, \xi_s) g(s, \xi_s)) ds \\
&= \int_0^{t\wedge\zeta_n} \sigma(s, W_s, X_s) dW_s + \int_0^{t\wedge\zeta_n} b(s, W_s, X_s) ds \ \text{ a.s.},
\end{aligned}$$

令 $n \longrightarrow \infty$, 即知 $\{X_t, 0 \le t < \zeta\}$ 为方程 (25.24) 的解.

反之，若 $\{\widetilde{X}_t, 0 \le t < \widetilde{\zeta}\}$ 为方程 (25.24) 的另一个解，应用伊藤公式于过程

$$\widetilde{\xi}(t \wedge \widetilde{\zeta}) \equiv \Phi(t \wedge \widetilde{\zeta}, -W(t \wedge \widetilde{\zeta}), \widetilde{X}(t \wedge \widetilde{\zeta})), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

可以证明 $\{\widetilde{\xi}_t; 0 \le t < \widetilde{\zeta}\}$ 为 (25.28) 的解，由 (25.28) 解的唯一性可知 $\widetilde{\zeta} \le \zeta$, 且在区间 $[0, \widetilde{\zeta})$ 中 $\widetilde{\xi}_t$ 与 ξ_t 重合，于是

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(t \wedge \widetilde{\zeta}) &= \Phi(t \wedge \widetilde{\zeta}, W(t \wedge \widetilde{\zeta}), \widetilde{\xi}(t \wedge \widetilde{\zeta})) \\ &= \Phi(t \wedge \widetilde{\zeta}, W(t \wedge \widetilde{\zeta}), \xi(t \wedge \widetilde{\zeta})) \\ &= X(t \wedge \widetilde{\zeta}) \qquad \text{a.s.},\end{aligned}$$

这就证明了方程 (25.24) 的解具有轨道唯一性.

利用此结果，可以得到随机微分方程的解的一个比较定理. 为此先给出一个关于常微分方程的引理:

引理 25.4 设在 $\mathbb{R}^2$ 的某个区域 G 中定义了两个函数 $f(t,x)$ 和 $\widetilde{f}(t,x)$, 均满足 Carathéodory 条件 (即: 在 G 中，关于 t 可测，关于 x 连续，且为某个局部可积函数 $m(t)$ 所控制). 设 (t_0, x_0) 和 $(t_0, \widetilde{x}_0)$ 为 G 中两个点，满足 $x_0 \le \widetilde{x}_0$. 若 $x(t)$ 为初值问题:

$$\frac{dx_t}{dt} = f(t, x_t), \qquad x(t_0) = x_0$$

的任一解; $\widetilde{x}(t)$ 为初值问题:

$$\frac{dx_t}{dt} = \widetilde{f}(t, x_t), \qquad x(t_0) = \widetilde{x}_0$$

的极大解，且不等式

$$(t - t_0) f(t, x) \le (t - t_0) \widetilde{f}(t, x) \tag{25.30}$$

在 G 中 a.e. 成立. 则在 $x(t)$ 和 $\widetilde{x}(t)$ 的公共存在区间内有 $x(t) \le \widetilde{x}(t)$.

证 注意条件 (25.30) 意味着当 $t>t_0$ 时有 $f\le\tilde{f}$, 当 $t<t_0$ 时有 $f\ge\tilde{f}$. 在 $t>t_0$ 的情形，此引理是 Fillipov[1] 中定理 7 的直接推论. $t<t_0$ 的情形可以类似地证明.

定理 25.5 在定理 25.3 假定下，若在 G 中存在函数 $\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}(t,w,x)$ 满足关于 (w,x) 的 Carathéodory 条件及不等式

$$w\sigma(t,w,x)\le w\tilde{\sigma}(t,w,x)\qquad \text{a.e. 于 } G; \tag{25.31}$$

又在 (25.27) 所定义的函数 g 的定义域 D 中存在函数 $\tilde{g}=\tilde{g}(t,\xi,\omega)$ 满足关于 (t,ξ) 的 Carathéodory 条件及不等式

$$g(t,\xi,\omega)\le\tilde{g}(t,\xi,\omega),\qquad (t,\xi,\omega)\in D; \tag{25.32}$$

设 $\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}(t,w,\xi)$ 及 $\tilde{\xi}=\tilde{\xi}(t,\omega)$ 分别为以下初值问题 (25.33) 及 (25.34) 的极大解:

$$\frac{dy}{dw}=\tilde{\sigma}(t,w,y),\qquad y(0)=\tilde{\xi}, \tag{25.33}$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\tilde{g}(t,\xi,\omega),\qquad \xi(0)=\tilde{\eta}(\omega), \tag{25.34}$$

其中 $\tilde{\eta}$ 为 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量，满足 $\eta\le\tilde{\eta}$. 则对于方程 (25.24) 的唯一解 X, 有

$$X(t)\le\tilde{\Phi}(t,W(t),\tilde{\xi}(t)) \tag{25.35}$$

对 a.a.ω 及使上式两边有意义的一切 t 成立.

证 应用引理 25.4 可知当 $\xi\le\tilde{\xi}$ 时有

$$\Phi(t,w,\xi)\le\tilde{\Phi}(t,w,\tilde{\xi})$$

在 Φ 及 $\tilde{\Phi}$ 的公共定义域上 a.e. 成立. 但由同一引理可知，当 $\eta\le\tilde{\eta}$ 时有

$$\xi(t,\omega)\le\tilde{\xi}(t,\omega)$$

在 ξ 及 $\tilde{\xi}$ 的公共定义域上 a.e. 成立，因而有定理结论.

下面讨论应用的几个例子:

例 4.8 考虑具有相同扩散系数 σ 的两个随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t^{(i)} = b^{(i)}(t, W_t, X_t^{(i)})dt + \sigma(t, W_t, X_t^{(i)})dW_t, \\ X_0^{(i)} = \eta^{(i)} \qquad (i = 1, 2), \end{cases}$$

其中 $\sigma, b^{(1)}$ 及 $b^{(2)}$ 均满足定理 25.3 中的条件, 且 $\eta^{(1)} \le \eta^{(2)}$, $b^{(1)}(t, w, x) \le b^{(2)}(t, w, x)$ 于 G 内成立. 令

$$g^{(i)} \equiv \Phi_\xi^{-1}\left[b^{(i)} - \frac{1}{2}(\sigma_w + \sigma_x\sigma) - \Phi_t\right] \qquad (i = 1, 2),$$

其中 Φ 为初值问题 (25.26) 的唯一解. 易见, 在其公共定义域内有 $g^{(1)} \le g^{(2)}$, 因而由定理 25.5 可知对 a.a.ω, 在公共存在区间内, 有 $X_t^{(1)} \le X_t^{(2)}$.

例 4.9 考虑具有不同扩散系数的两个随机微分方程:

$$\begin{cases} dX_t^{(i)} = \sigma_i(X_t^{(i)})dW_t + \frac{1}{2}\sigma_i(X_t^{(i)})\sigma_i'(X_t^{(i)})dt, \\ X_0^{(i)} = x_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 1, 2), \end{cases}$$

其中 $\sigma_i > 0, \sigma_i \in C^2(\mathbb{R})(i = 1, 2)$.

首先, 解下列初值问题:

$$\frac{dy_i}{dw} = \sigma_i(y_i), \qquad y_i(0) = \xi_i \ \ (i = 1, 2,).$$

显然其解 $\Phi_i(w, \xi_i)(i = 1, 2)$ 满足以下等式:

$$\int_{\xi_1}^{\Phi_1(w,\xi_1)} \frac{dy}{\sigma_1(y)} = w = \int_{\xi_2}^{\Phi_2(w,\xi_2)} \frac{dy}{\sigma_2(y)},$$

在此特殊情形下, 因 $b_i = \frac{1}{2}\sigma_i\sigma_i'$, 故 (25.27) 中的 $g_i \equiv 0(i = 1, 2)$, 初值问题 (25.28) 的解为常数: $\xi_i \equiv x_i$. 因此, 若对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dy}{\sigma_1(y)} \ge \int_{x_2}^{x} \frac{dy}{\sigma_2(y)},$$

则 $\Phi_1(w,x_1)\le\Phi_2(w,x_2)$, 于是对 a.a.$\omega$ 有

$$X_t^{(1)}=\Phi_1(W_t,x_1)\le\Phi_2(W_t,x_2)=X_t^{(2)},\qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

例 4.10 考虑随机微分方程:

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)\cdot dW_t,\qquad X(0)=x_0,$$

其中 $\sigma\in C_b^1(\mathbb{R})$, $b\in C^0(\mathbb{R})$ 满足局部 Lipschitz 条件及线性增长条件:

$$|b(x)|\le K_0(1+x^2)^{\frac12}.$$

在此条件下可知函数 σ 及由 (25.27) 所定义的 g 也满足线性增长条件, 譬如说

$$|\sigma(x)|\le K_1(1+x^2)^{\frac12},$$

$$|g(t,\xi)|\le K(1+\xi^2)^{\frac12}.$$

令 $\widetilde{\sigma}\equiv\mathrm{sgn}(w)\cdot K_1(1+x^2)^{\frac12}$ 和 $\widetilde{g}\equiv K(1+\xi^2)^{\frac12}$, 定理 25.5 中 (25.33) 及 (25.34) 的解分别为

$$\widetilde{\Phi}=\mathrm{sh}(K_1|w|+c),\qquad c=\log|\xi+\sqrt{1+\xi^2}|$$

及

$$\widetilde{\xi}=\mathrm{sh}(Kt+c_1),\qquad c_1=\log|x_0+\sqrt{1+x_0^2}|.$$

应用定理 25.5, 可得到扩散过程 X_t 的轨道的渐近估计, 对 a.a.ω 有

$$X(t)\le\mathrm{sh}(K_1|W(t)|+Kt+c_1),\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+.$$

类似讨论, 可得其下界:

$$X(t)\ge\mathrm{sh}(-K_1|W(t)|-Kt+c_1),\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+.$$

要将上述方法从一维情形推广到多维情形, 对于解过程 X 来说, 从取值 $\mathbb{R}$ 推广到取值 $\mathbb{R}^m$ 没有任何困难; 但对于驱动过程 W 来说, 从取值 $\mathbb{R}$ 推广到取值 $\mathbb{R}^d$ 将出现本质的困难, 因为此时方

程 (25.16) 或 (25.12) 成了一组偏微分方程，要使它完全可积，需要满足所谓 Frobénius 条件.

为确定起见，我们考虑伊藤方程 (21.1), 其中系数充分光滑. 由随机微分规则，它等价于如下的 Fisk-Stratonovich 方程

$$\begin{cases} dX_t = \widetilde{b}(X_t)dt + \sigma(X_t) \circ dW_t, & t \in \mathbb{R}_+, \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{25.36}$$

其中

$$\widetilde{b}^i(x) = b^i(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{m}(\sigma_j^k \cdot \partial_k \sigma_j^i)(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{25.37}$$

令

$$A_j(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sigma_j^i(\cdot)\partial_i \qquad (j = 1, 2, \cdots, d),$$

$$A_0(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{m} \widetilde{b}^i(\cdot)\partial_i$$

表示由系数 $\widetilde{b}$ 及 σ 所决定的 $\mathbb{R}^m$ 上的光滑向量场，则方程 (25.36) 可记为

$$dX_t = A_0(X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} A_j(X_t) \circ dW_t^j. \tag{25.38}$$

此式应理解为：对一切充分光滑的函数 f, 有

$$df(X_t) = (A_0 f)(X_t)dt + \sum_{j=1}^{d}(A_j f)(X_t) \circ dW_t^j. \tag{25.39}$$

对 $\mathbb{R}^m$ 上任意两个光滑向量场：

$$A(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{m} a^i(\cdot)\partial_i,$$

$$B(\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{m} b^i(\cdot)\partial_i,$$

可以定义新的向量场:

$$[A, B] \equiv AB - BA, \tag{25.40}$$

即

$$[A, B](\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{m} (a^j(\cdot)\partial_j b^i(\cdot) - b^j(\cdot)\partial_j a^i(\cdot)) \right\} \partial_i.$$

$[\cdot\,,\,\cdot]$ 称为 **Lie 括号 运算**.

实数域上的一个线性空间 $\mathcal{H}$, 若其中规定了 Lie 括号运算, 且对 $\forall A, B, C \in \mathcal{H}$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

1° $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$;

2° $[A, B] = -[B, A]$;

3° $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$,

则此线性空间称为 **Lie 代数**. 我们以 Lie $\{A_j, 1 \le j \le d\}$ 表示含 $A_1, A_2, \cdots, A_d$ 的 $\mathcal{H}$ 中的最小 Lie 子代数, 称为 **由向量 $A_1, A_2, \cdots, A_d$ 所产生的 Lie 代数**.

讨论相当于 (25.16) 或 (25.12) 的全微分方程:

$$\begin{cases} \partial_j \Phi^i = \sigma_j^i(\Phi) \qquad (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, d) \\ \Phi(0) = \xi \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{25.41}$$

当 Lie $\{A_j,\ 1 \le j \le d\}$ 为 Abel 代数时, 则此组方程完全可积, 因而可以用上述方法求解方程 (21.1) 或 (25.36). Yamato[1] 进一步证明了, 只要 Lie $\{A_j, 1 \le j \le d\}$ 具有某种幂零性质时, 其解仍可以用多重 Wiener 积分表示出来.

由于这种方法可以直接应用常微分方程理论中已知的结论, 所以无论在随机方程的理论分析或数值计算方面都是很有效的. 进一步的讨论可参看 Doss[1], 黄志远 [2,3] 以及黄志远、许明浩、胡则成 [1].

第五章　Malliavin 随机分析

自从 Wiener 1923 年构造了 Brown 运动的数学模型以来，许多人试图对 Wiener 泛函建立一套分析理论. 不幸的是，许多常见的泛函，例如伊藤积分或伊藤随机微分方程的解，相对于 Wiener 空间的任何一种范数 (或准范数) 来说，未必都是连续的，当然更谈不上它们的 Fréchet 微分了. 直到 1976 年， Malliavin[2] 建立了一套对 Wiener 泛函的 "相对微分" 运算，使这些重要的泛函在某种意义下是 "光滑" 的，因而获得了一个重大的突破. 由于这种微分是对 Wiener 泛函进行的，所以 Malliavin 称之为 "随机变分运算 (stochastic calculus of variation)"，现在则一般称之为 Malliavin calculus. 应用这种运算， Malliavin 第一次用概率方法证明了偏微分方程理论中关于亚椭圆算子的著名的 Hörmander 定理 (参看 Hörmander[1]). 于是，这一成就成为当今随机分析领域中最瞩目的成果之一，并且得到了广泛的应用.

为建立 Malliavin 随机分析的严格数学理论，许多学者从不同的途径进行了研究. Stroock 和 Kusuoka (参看 Stroock[2,3,4], Kusuoka-Stroock[1,2,3]) 系统地发展了 Malliavin 关于 Wiener 空间上的 Ornstein-Uhlenbeck 半群理论. Bismut[1] 应用更为直接的 Girsanov 变换方法，得到了 Wiener 空间上的分部积分公式. Shigekawa[1] 和 Stroock[2] 提出了 Wiener 泛函的 Sobolev 空间概念，接着 Meyer[6] 证明了不同类型 Sobolev 范数的等价性， Watanabe[1,2] 研究了 Schwartz 广义函数和 Wiener 泛函的复合，引进了广义 Wiener 泛函及其渐近展开公式，因而形成了一个统一的 Sobolev 空间理论. 本书着重介绍 Malliavin 随机分析的 Sobolev 空间方法.

§26. Wiener 空间及 Wiener 泛函

在本章中，我们以 $\mathcal{W}$ 表示如下连续函数空间:

$$\mathcal{W} \equiv \left\{ w \in C(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d); w(0) = 0, \text{且} \lim_{t\to\infty} \frac{|w(t)|}{1+t} = 0 \right\}. \quad (26.1)$$

由 Brown 运动轨道的熟知性质 (例如参看 (0.3)) 可知其几乎所有轨道属于空间 $\mathcal{W}$, 因而 Wiener 测度 μ 实际上集中于 $\mathcal{W}$ 上, 在 $\mathcal{W}$ 中定义范数:

$$\|w\|_{\mathcal{W}} \equiv \sup_{t\geq 0} (1+t)^{-1} |w(t)|, \quad (26.2)$$

则 $\mathcal{W}$ 构成可分 Banach 空间. 以 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{W})$ 表示其 Borel 子集 σ-代数, $\overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}^{\mu}$ 表示 $\mathcal{B}$ 关于 μ 的完备化 σ- 代数. 则 $(\mathcal{W}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$ 为一完备概率空间, 其上一切 $\overline{\mathcal{B}}$ 可测函数 (随机变量) 都称为 Wiener 泛函, 而关于测度 μ 的积分 (数学期望) 记为 $\mathbb{E}[\,\cdot\,]$.

值得注意的是, 一般的概率空间并没有拓扑结构和代数结构, 但如果采用 $(\mathcal{W}, \overline{\mathcal{B}}, \mu)$ 为基本概率空间, 由于 $\mathcal{W}$ 是 Banach 空间, 给予了概率空间以补充的线性拓扑结构, 因此有可能讨论对 Wiener 泛函的微分问题.

在有限维空间 $\mathbb{R}^d$ 中的微分, 是基于 Lebesgue 测度关于一切方向运动的不变性质. 但在无穷维线性空间中, 却不可能有这样的测度. 例如, 设 $\mathbb{H}$ 为任一可分、无穷维 Hilbert 空间, 若 λ 为 $\mathbb{H}$ 中 Borel 测度, 在每一非空开集上取正数值, 且在有界 Borel 集上取有限值, 则 λ 不可能有运动不变性质. 事实上, 只要任取一组正交基 $\{e_k\}$, 考虑以 e_k 为心、1/2 为半径的球 $B_k (k \in \mathbb{N})$, 和以 0 为心、2 为半径的球 B, 若 λ 具有运动不变性质, 则因诸 B_k 互不相交且含于 B 中, 必有 $\lambda(B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_k) = \lim_{n\to\infty} n\lambda(B_1) = \infty$, 于是和假定矛盾.

因此, 在 Banach 空间 $\mathcal{W}$ 中, 我们很自然地以 Gauss 测度 μ 来代替有限维空间中的 Lebesgue 测度. 关于 Banach 空间中 Gauss

测度一般性质的研究，读者可参看 Kuo[1], Skorohod[2] 或 Daleckii-Fomin[1]. 在这里，我们限于讨论 Wiener 测度.

对任意 $h \in \mathcal{W}$, 考虑推移算子：

$$\theta_h : \mathcal{W} \ni w \longrightarrow w + h \in \mathcal{W}$$

及其在 $\overline{\mathcal{B}}$ 上诱导的测度：

$$\mu_h \equiv \mu \circ \theta_h^{-1},$$

我们知道，一般说来，μ_h 未必和 μ 等价. 然而根据 Girsanov 定理 (参看 §15), 若 h 属于以下子空间：

$$\begin{aligned} H \equiv \{ & h = (h^1, \cdots, h^d) \in \mathcal{W};\ h^i \text{绝对连续} \\ & \text{且导函数 } \dot{h}^i \in L^2(\mathbb{R}_+),\ i = 1, \cdots, d\}, \end{aligned} \tag{26.3}$$

则 $\mu_h \approx \mu$, 且

$$\frac{d\mu_h}{d\mu} = \exp\left\{ \int_0^\infty (\dot{h}(t), dw(t)) - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}(t)|^2 dt \right\}.$$

在 H 中定义内积：

$$(h, g)_H \equiv \int_0^\infty (\dot{h}(t), \dot{g}(t)) dt, \qquad h, g \in H, \tag{26.4}$$

则 H 为可分 Hilbert 空间. 由于

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{W}} &= \sup_{t \ge 0} (1+t)^{-1} |h(t)| \\ &\le \sup_{t \ge 0} (1+t)^{-1} \left(t \int_0^t |\dot{h}(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{t \ge 0} (1+t)^{-1} t^{\frac{1}{2}} \|h\|_H \le \|h\|_H, \end{aligned}$$

所以嵌入映射 i: $H \longrightarrow \mathcal{W}$ 为连续，且 $i(H)$ 在 $\mathcal{W}$ 中稠密. 但根据 Brown 运动轨道的不可微性质，我们有 $\mu(H) = 0$.

通过 Riesz 映射将 H 与其对偶空间 H^* 视为同一，则有

命题 26.1 $$\mathcal{W}^* \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathcal{W}, \tag{26.5}$$

其中 $\hookrightarrow$ 表示连续、稠密地嵌入．此时

$$\mathcal{W}^* = \{l=(l_1,\cdots,l_d)\in H;\ \dot{l}_i \text{ 具有有限变差，且 } \lim_{t\to\infty} t\dot{l}_i(t)=0, i=1,\cdots,d\}. \tag{26.6}$$

证 前面已证明 $H\hookrightarrow\mathcal{W}$，而 $\mathcal{W}^*\hookrightarrow H^*$ 是它的直接推论．根据 Riesz 定理，任给 $l\in H^*$，存在唯一的 $h_l\in H$，使对于一切 $g\in H$ 有

$$<l,\ g>=(h_l,g)_H=\int_0^\infty(\dot{h}_l(t),\dot{g}(t))dt, \tag{28.7}$$

其中 $<\cdot,\ \cdot>$ 表示 $H^*\times H$ 上的典则双线性型．

若 h_l 属于 (26.6) 右边的集合，由分部积分可得

$$<l,\ g>=-\int_0^\infty(g(t),d\dot{h}_l(t)), \tag{26.8}$$

故 $<l\ ,\cdot>$ 可开拓为 $\mathcal{W}$ 上的连续线性泛函；反之，若 $l\in\mathcal{W}^*$，则存在 $\mathbb{R}_+$ 上有限符号测度 λ_l^i $(i=1,\cdots,d)$，使

$$<l,\ w>=\int_0^\infty(w(t),\lambda_l(dt)),\qquad w\in\mathcal{W},$$

其中 $<\cdot\ ,\cdot>$ 表示 $\mathcal{W}^*\times\mathcal{W}$ 上的典则双线性型，$\lambda_l=(\lambda_l^1,\cdots,\lambda_l^d)$．令

$$h_l^i(t)\equiv\int_0^t\lambda_l^i([s,\infty))ds\qquad(i=1,\cdots,d),$$

则 $h_l=(h_l^1,\cdots,h_l^d)$ 属于 (26.6) 右边的集合．但对一切 $g\in H$，

$$\begin{aligned}(h_l,\ g)_H&=\int_0^\infty(\lambda_l([t,\infty)),\ \dot{g}(t))dt\\&=\int_0^\infty(g(t),\ \lambda_l(dt))=<l,\ g>,\end{aligned}$$

故由 Riesz 映射，$l \approx h_l$, 于是 (26.6) 成立.

注　今后我们将不再区别 l 和 h_l 而将 H^* 与 H 视为同一空间. 由 (26.7) 可知，$\mathcal{W}^* \times \mathcal{W}$ 上的双线性型 $<\cdot,\cdot>$ 局限于 H 时和 H 中内积 $(\cdot,\cdot)_H$ 重合，当 $l \in \mathcal{W}^*$ 时

$$< l,\ w >= \int_0^\infty (\dot{l}(t), dw(t))$$

正好是 $\dot{l}$ 关于 w 的 **Wiener 随机积分**，因而 Wiener 泛函 $< l,\cdot >$ 是概率空间 $(\mathcal{W},\overline{\mathcal{B}},\mu)$ 上的 Gauss 随机变量，均值为 0, 协方差为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[< l,\cdot >< l',\cdot >] &= \int_{\mathcal{W}} < l,w >< l',w > \mu(dw) \\ &= \int_0^\infty (\dot{l}(t),\ \dot{l}'(t))dt = (l,\ l')_H. \end{aligned} \tag{26.9}$$

上式表明映射 $l \longmapsto < l,\ \cdot >$ 为 H 中的稠密子空间 $\mathcal{W}^*$ 到 $L^2(\mathcal{W},\overline{\mathcal{B}},\mu)$ 中的线性等距，因而可开拓到 H 上. 对 $h \in H, < h,\ w >$ 即 $\dot{h}$ 关于 w 的 Wiener 随机积分. 但是必须注意，作为 $L^2(\mathcal{W},\overline{\mathcal{B}},\mu)$ 中极限的随机变量 $< h,\ \cdot >$, 只是 μ–a.s. 有定义和 μ–a.s. 唯一确定的，而当 $l \in \mathcal{W}^*$ 时，$< l,\ \cdot >$ 处处有定义，且 (通过分部积分公式) 可以表示为按轨道的积分. 若 $\{h_j\}$ 为 H 中的标准正交基，由 (26.9) 可知，$\{< h_j,\ \cdot >\}$ 为 $(\mathcal{W},\overline{\mathcal{B}},\mu)$ 上的独立标准正态随机变量序列. 由于对一切 $t \in \mathbb{R}_+, h_t(s) \equiv t \wedge s \in H$, 且 $w(t) =< h_t,\ w >$, 易见 $\overline{\mathcal{B}}$ 可由 $\{< h_j,\ \cdot >; j \in \mathbb{N}\}$ 产生.

一般地，若 B 为可分 Banach 空间，H 为可分 Hilbert 空间且连续、稠密地嵌入 B, 将 H 与 H^* 等同，我们有

$$B^* \hookrightarrow H^* \equiv H \hookrightarrow B.$$

若 μ 为 B 上的 Gauss 测度，均值为 0, 且满足条件:

$$\int_B < l,\ x >< l',\ x > \mu(dx) = (l,\ l')_H, \qquad l,l' \in B^*.$$

则称 (B,H,μ) 为 **抽象 Wiener 空间**. 上述特例 $(\mathcal{W},H,\mu)$ 称为 **经典 Wiener 空间**. 或简称 **Wiener 空间**.

更一般地, 若 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 为一完备概率空间, H 为可分 Hilbert 空间, $\{W_h, h\in H\}$ 为一族 Gauss 随机变量, 满足:

$$\mathbb{E}[W_h]=0; \qquad \mathbb{E}[W_hW_g]=(h,\ g)_H, \qquad h,g\in H. \tag{26.10}$$

则称 $(\Omega,\mathcal{F},\mu;H)$ 为 **Gauss 概率空间**.

下面限于讨论经典 Wiener 空间, 但所有结果均可推广到抽象 Wiener 空间乃至一般的 Gauss 概率空间上去. 例如参看 Sugita[1,2], Watanabe[1,2], Malliavin[9], 黄志远、严加安 [1].

从上面讨论可知, Wiener 测度 μ 对于 $\mathcal{W}$ 中一个稠密子集 H 中的 "方向" h 而言, 具有某种 "平移不变性", 这种性质称为拟不变性. 正是由于 Wiener 测度的这种拟不变性质, 才有可能定义 Wiener 泛函的相对微分运算.

定义 26.2 设 E 为可分 Hilbert 空间. 一切 $\overline{\mathcal{B}}/\mathcal{B}(E)$ 可测映象都称为 **E 值 Wiener 泛函**(和通常一样, 我们将不区别 μ a.e. 相等的泛函); 设 $p\in[1,\infty)$, 若 E 值 Wiener 泛函 φ 使 $\|\varphi(w)\|_E^p$ 在 $\mathcal{W}$ 上为 μ 可积, 则记: $\varphi\in L^p(E)$, 其在 $L^p(E)$ 中的范数定义为

$$\|\varphi\|_p\equiv\|\varphi\|_{L^p(E)}\equiv(\mathbb{E}[\|\varphi\|_E^p])^{1/p}. \tag{26.11}$$

特别, 当 $E=\mathbb{R}$ 时, 将 $L^p(\mathbb{R})$ 简记为 L^p.

定义 26.3 Wiener 泛函 φ, 若存在正整数 n, 实多项式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $l^{(1)},\cdots,l^{(n)}\in H^*$, 使

$$\varphi(w)=p(<l^{(1)},w>,\cdots,<l^{(n)},w>), \qquad w\in\mathcal{W}, \tag{26.12}$$

则称为 **多项式泛函**. 多项式泛函总体记为 $\mathbb{P}$.

E 值 Wiener 泛函 ψ, 若存在正整数 $m,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\in\mathbb{P}$ 及 $e_1,\cdots,e_m\in E$, 使

$$\psi(w)=\sum_{k=1}^m\varphi_k(w)e_k, \qquad w\in\mathcal{W}, \tag{26.13}$$

则称为 E 值多项式泛函，其总体记为 $\mathbb{P}(E)$.

注 在上述定义中，借助于 Schmidt 正交化方法，总可假定 $l^{(1)},\cdots,l^{(n)}$ 为 H 中标准正交系，$e_1,\cdots,e_m$ 为 E 中标准正交系.

命题 26.4 $\mathbb{P}(E)$ 在 $L^p(E)$ $(1\le p<\infty)$ 中稠密.

证 只证 $E=\mathbb{R}$ 的情形. 选择 H 的一组标准正交基 $\{h_j\}$, 则 $\{<h_j,\cdot>\}$ 为独立标准 Gauss 变量序列，生成 σ- 代数 $\overline{\mathcal{B}}$. 若 $\mathbb{P}$ 不在某 L^p 中稠密，则对 p 的共轭指数 q 存在非零随机变量 $\xi\in L^q$ 使 $\forall\varphi\in\mathbb{P}$, $\mathbb{E}[\xi\varphi]=0$. 由此推出

$$\mathbb{E}\Big[\xi\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n}t_j<h_j,\cdot>\Big\}\Big]$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}\mathbb{E}\Big[\xi\Big(\sum_{j=1}^{n}t_j<h_j,\cdot>\Big)^m\Big]=0$$

对任意 $n\in\mathbb{N},t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}$ 成立. 令

$$\xi_n\equiv\mathbb{E}[\xi|<h_1,\cdot>,\cdots,<h_n,\cdot>],$$

则存在 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数 g, 使

$$\xi_n(w)=g(<h,w>,\cdots,<h_n,w>).$$

但

$$\mathbb{E}\Big[\xi_n\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n}t_j<h_j,\cdot>\Big\}\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\xi\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n}t_j<h_j,\cdot>\Big\}\Big]=0,$$

此即

$$\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\exp\Big\{i\sum_{j=1}^{n}t_jx_j\Big\}\gamma(dx)=0,$$

其中 γ 为 $\mathbb{R}^n$ 上标准 Gauss 测度. 由 Fourier 变换唯一性可知 $g=0$ a.e.$[\gamma]$, 于是 $\xi_n=0$ a.s.. 但由鞅收敛定理, $\xi_n\longrightarrow\xi$ a.s., 从而 $\xi=0$ a.s., 这和假定矛盾, 所以 $\mathbb{P}$ 在一切 L^p 中稠密.

下一节将讨论 Wiener 泛函的微分运算. 它实质上是一种无穷维的微分运算. 作为准备, 我们先讨论有限维空间 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\gamma)$, 其中 γ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上的标准 Gauss 测度:

$$\gamma(dx)=(2\pi)^{-d/2}\exp\{-|x|^2/2\}dx.$$

以 $C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d)$ 及 $C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d)$ 分别表示实值和 $\mathbb{R}^d$ 值的缓增 C^∞ 函数 (无穷次可微、且其各阶导数增长的阶不超过多项式的增长) 的空间.

对 $\varphi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d)$, 其 **梯度** $\nabla\varphi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d)$ 由下式确定:

$$(\nabla\varphi(x),h)\equiv\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\varphi(x+\varepsilon h)]_{\varepsilon=0},\qquad x,h\in\mathbb{R}^d. \tag{26.14}$$

对 $\psi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d)$, 仿此也可定义 $\nabla\psi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\bigotimes\mathbb{R}^d)$. 其 **散度**div $\psi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d)$ 定义为

$$\mathrm{div}\psi(x)\equiv\mathrm{tr}(\nabla\psi(x)),\qquad x\in\mathbb{R}^d. \tag{26.15}$$

若令

$$\delta\psi(x)\equiv(\psi(x),x)-\mathrm{div}\psi(x),\qquad x\in\mathbb{R}^d, \tag{26.16}$$

则有以下分部积分公式:

命题 26.5 若 $\varphi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d),\psi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d)$, 则

1° $$\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}\psi(x)\gamma(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}(\psi(x),x)\gamma(dx); \tag{26.17}$$

2° $$\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla\varphi(x),\psi(x))\gamma(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\delta\psi(x)\gamma(dx). \tag{26.18}$$

证 设 $\psi=(\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^d)$, 由于 div $\psi(x)=\sum_{k=1}^d\partial_k\psi^k(x)$, $(\psi(x),x)=\sum_{k=1}^d x_k\psi^k(x)$, 为证 (26.17) 只须证明对每个 k ($k=1,\cdots,d$) 有

$$\int_{\mathbb{R}^d}\partial_k\psi^k(x)\gamma(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}x_k\psi^k(x)\gamma(dx).$$

由于上式两边被积函数均可用 $x_1,x_2,\cdots,x_d$ 的多项式按 γ 测度均方逼近, 故只须考虑 $\psi^k(x)$ 为多项式的情形; 由积分的线性性质, 又不妨假定其为单项式; 若此单项式含 x_k 的偶数次幂, 则两边积分为 0, 于是只须证明当 $\psi^k(x)=x_k^{2m-1}$ 时上式成立, 但此时左右两边均等于 $(2m-1)!!$, 故 (26.17) 得证.

在 (26.17) 中以 $\varphi\psi$ 代 ψ, 注意

$$\text{div}(\varphi\psi)=\varphi\text{div}\psi+(\nabla\varphi,\psi)$$

及 (26.16), 即得 (26.18) 式.

再考虑 **Ornstein-Uhlenbeck** 算子:

$$\mathcal{L}=-\delta\nabla=\Big(\Delta-\sum_{k=1}^d x_k\partial_k\Big). \tag{26.19}$$

根据第四章 §21 例 4.5, $\mathcal{L}$ 扩散过程 X 为以下随机微分方程之唯一强解:

$$dX_t=-X_tdt+\sqrt{2}dW_t,\qquad X_0=x\in\mathbb{R}^d,$$

此解有明显的表达式:

$$X_t=e^{-t}x+\sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-s)}dW_s,\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

由于 $(X_t-e^{-t}x)(1-e^{-2t})^{-1/2}$ 服从 d 维标准 Gauss 分布, 故由 $\mathcal{L}$ 生成的转移半群具有以下形式:

$$\begin{aligned}(T_t\varphi)(x)&\equiv\mathbb{E}_x[\varphi(X_t)]\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)\gamma(dy)\\&\qquad t\geq0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ \varphi\in C^\infty_\nearrow(\mathbb{R}^d).\end{aligned} \tag{26.20}$$

由定义立即可得

命题 26.6 若 $\varphi, \psi \in C^{\infty}_{\nearrow}(\mathbb{R}^d)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(\mathcal{L}\psi)(x)\gamma(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)(\mathcal{L}\varphi)(x)\gamma(dx). \qquad (26.21)$$

证 在 (26.18) 中以 $\nabla\psi$ 代 ψ, 即得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\delta(\nabla\psi)(x)\gamma(dx) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\varphi(x), \nabla\psi(x))\gamma(dx), \end{aligned}$$

此式关于 φ 及 ψ 为对称，故和右边相等.

以上性质称为 Ornstein-Uhlenbeck 算子的自共轭性，或 Ornstein-Uhlenbeck 半群的对称性. 下一节将要推广算子 ∇, δ 及 $\mathcal{L}$ 到无穷维情形.

习题 5.1 证明对一维 Ornstein-Uhlenbeck 半群 $\{T_t, t \geq 0\}$ 及 Hermite 多项式

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}),$$

有

$$T_t h_n(x) = e^{-nt} h_n(x), \qquad t \geq 0.$$

(提示：利用恒等式 (16.21)

$$\exp\left\{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} h_n(x)\Big).$$

§27. Wiener 泛函的微分运算及 Ornstein-Uhlenbeck 半群

为对 Wiener 泛函定义微分运算，我们所遵循的途径是：首先对多项式泛函定义算子 ∇,δ 及 $\mathcal{L}$(它实质上是有限维的)，其次定义其 Sobolev 范数和 Wiener 泛函的 Sobolev 空间，然后将这些算子的定义域开拓到 Sobolev 空间上去．其中关键是利用 Wiener 混沌分解 (参看 §16) 及 Ornstein-Uhlenbeck 半群的超压缩性质 (hypercontractivity, 见 Nelson[2] 以及定理 27.8).

定义 27.1 对 $\varphi\in\mathbb{P}$, 其在 $w\in\mathcal{W}$ 的 **梯度** (即 Fréchet 导数) $\nabla\varphi(w)\in H$ 由下式确定：

$$(\nabla\varphi(w),u)\equiv\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\varphi(w+\varepsilon u)]_{\varepsilon=0},\qquad u\in H. \tag{27.1}$$

当 $\varphi(w)$ 具有形式 (26.12) 时，容易算出其明显表达式：

$$(\nabla\varphi(w),u)=\sum_{k=1}^{n}\partial_k p(<l^{(1)},w>,\cdots,<l^{(n)},w>)(l^{(k)},u). \tag{27.2}$$

因为 $\nabla\varphi(w)\in H$, 所以 $\nabla\varphi\in\mathbb{P}(H)$, 即 H 值多项式.

一般地，设 E 为任一可分 Hilbert 空间， $\psi\in\mathbb{P}(E)$, 则其在 $w\in\mathcal{W}$ 的 **梯度**$\nabla\psi(w)\in\mathbb{P}(H\bigotimes E)$ 由下式确定：

$$(\nabla\psi(w),h\otimes e)_{H\otimes E}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[(\psi(w+\varepsilon h),e)_E]_{\varepsilon=0}$$
$$w\in\mathcal{W},\ h\in H,\ e\in E, \tag{27.3}$$

其中 $H\bigotimes E$ 表示 Hilbert 空间 H 和 E 的 **张量积**, 即由 $H\times E$ 上的双线性型 V, 赋以 Hilbert-Schmidt 范数：

$$\|V\|_{H.S.}\equiv\Big\{\sum_{j,k}V(h_j,e_k)^2\Big\}^{1/2}$$

所构成的 Hilbert 空间，其中 $\{h_j\}$ 及 $\{e_k\}$ 分别为 H 及 E 的标准正交基. 注意此定义不依赖于正交基的选择 (例如可参看 Reed-Simon[1]). 而且对于 $h_1, h_2 \in H$ 及 $e_1, e_2 \in E$, 有

$$(h_1 \otimes e_1, h_2 \otimes e_2)_{H\otimes E} = (h_1, h_2)_H (e_1, e_2)_E.$$

当 $\psi(w)$ 具有形式 (26.13) 时，容易算出其明显表达式：

$$\nabla\psi(w) = \sum_{k=1}^{m} \nabla\varphi_k(w) \otimes e_k, \tag{27.4}$$

易见，此值不依赖于 ψ 的特殊表示形式.

特别，当 $\varphi \in \mathbb{P}$ 时，$\psi = \nabla\varphi \in \mathbb{P}(H), \nabla\psi = \nabla^2\varphi \in \mathbb{P}(H \bigotimes H)$, 依此类推，一般地对 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$\nabla^k\varphi \equiv \nabla(\nabla^{k-1}\varphi) \in \mathbb{P}(H^{k\otimes}),$$

其中 $H^{k\otimes} \equiv \overbrace{H \otimes H \otimes \cdots \otimes H}^{k}$ 表示 H 的 k 重张量积. 一般地，当 $\psi \in \mathbb{P}(E)$ 时，有

$$\nabla^k\psi \in \mathbb{P}(H^{k\otimes} \otimes E).$$

对 $V \in H \bigotimes H$, 定义其迹 tr (V) 为

$$\mathrm{tr}(V) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (V, h_k \otimes h_k)_{H\otimes H}, \tag{27.5}$$

其中 $\{h_k\}$ 为 H 中任一组标准正交基 (若此级数绝对收敛，其值也不依赖于正交基的选择).

对多项式泛函的微分运算，实质上是有限维的，利用有限维 Gauss 概率空间的结果容易得到梯度的如下性质：

命题 27.2 设 $\varphi, \psi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathbb{P}, f(x_1, \cdots, x_n)$ 为实多项式，$h \in H$, 则

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi, \tag{27.6}$$

$$\nabla f(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=\sum_{k=1}^{n}\partial_k f(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\nabla\varphi_k, \tag{27.7}$$

$$\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\ h)]=\mathbb{E}[\varphi<h,\cdot>], \tag{27.8}$$

$$\mathbb{E}[\psi(\nabla\varphi,\ h)]=\mathbb{E}[\varphi\psi<h,\cdot>]-\mathbb{E}[\varphi(\nabla\psi,\ h)]. \tag{27.9}$$

证 前两式可直接验证. 若 φ 具有形式 (26.12) 且其中 $l^{(1)}$, $\cdots,l^{(n)}$ 为 H 中标准正交系, 则可扩充为 H 之一组基 $\{l^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$, 于是 $h=\sum_j(l^{(j)},h)l^{(j)}$. 由分部积分公式得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi<h,\cdot>]&=\mathbb{E}\left[\varphi\sum_j(l^{(j)},h)<l^{(j)},\cdot>\right]\\&=\sum_{j=1}^{n}(l^{(j)},h)\int_{\mathbb{R}^n}x_jp(x_1,\cdots,x_n)\gamma(dx)\\&=\sum_{j=1}^{n}(l^{(j)},h)\int_{\mathbb{R}^n}\partial_jp(x_1,\cdots,x_n)\gamma(dx),\end{aligned}$$

其中 γ 为 $\mathbb{R}^n$ 上标准 Gauss 测度. 但根据 (27.2) 式, 上式恰好等于 $\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\ h)]$, 于是证明了 (27.8) 式. 在 (27.8) 式中以 $\varphi\psi$ 代替 φ 并利用 (27.6) 式即得 (27.9).

现在来讨论 ∇ 的共轭算子 δ. 因梯度 $\nabla\varphi$ 为 H 值泛函, 故 H 相当于切空间, H 值泛函即向量场, 而 ∇ 的共轭算子 δ 相当于向量场的散度. 将 (26.18) 推广到无穷维, 我们有

定义 27.3 设 $\psi\in\mathbb{P}(H)$, 其 **散度** $\delta\psi\in\mathbb{P}$ 由下式确定:

$$\mathbb{E}[\varphi\delta\psi]=\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\psi)_H],\qquad\forall\varphi\in\mathbb{P}. \tag{27.10}$$

一般地, 若 E 为可分 Hilbert 空间, $\psi\in\mathbb{P}(H\bigotimes E)$, 其 **散度** $\delta\psi\in\mathbb{P}(E)$ 由下式确定:

$$\mathbb{E}[(\varphi,\ \delta\psi)_E]=\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\ \psi)_{H\otimes E}],\qquad\forall\varphi\in\mathbb{P}(E). \tag{27.10'}$$

对 $\varphi\in\mathbb{P}(E)$, 定义 **Ornstein-Uhlenbeck 算子**(简称 **OU 算子**) 为

$$\mathcal{L}\varphi\equiv-\delta\nabla\varphi.$$

下一命题给出了多项式情形下的具体表达式从而也证明了上述定义的合理性.

命题 27.4 若 $\psi \in \mathbb{P}(H)$ 具有形式 $\psi = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k h_k$, 其中 $\varphi_k \in \mathbb{P}, h_k \in H(k = 1, \cdots, m)$, 则

$$\delta\psi = \sum_{k=1}^{m} [\varphi_k < h_k, \cdot > -(\nabla\varphi_k, h_k)]; \tag{27.11}$$

若 $\varphi \in \mathbb{P}$ 具有形式 (26.12), 则

$$\mathcal{L}\varphi = \sum_{k,j=1}^{n} \partial_k \partial_j p(< l^{(1)}, \cdot >, \cdots, < l^{(n)}, \cdot >)(l^{(k)}, l^{(j)}) - \sum_{k=1}^{n} \partial_k p(< l^{(1)}, \cdot >, \cdots, < l^{(n)}, \cdot >) < l^{(k)}, \cdot > . \tag{27.12}$$

证 根据 (27.9) 式, $\forall \varphi \in \mathbb{P}$ 及 $k = 1, \cdots, m$ 有

$$\mathbb{E}[\varphi_k (\nabla\varphi, h_k)] = \mathbb{E}[\varphi\varphi_k < h_k, \cdot >] - \mathbb{E}[\varphi(\nabla\varphi_k, h_k)]$$

对 k 求和即可看出由 (27.11) 给出的 $\delta\psi$ 满足定义式 (27.10). 若 φ 由 (26.12) 给出, 由 (27.2) 式

$$\nabla\varphi = \sum_{k=1}^{n} \partial_k p(< l^{(1)}, \cdot >, \cdots, < l^{(n)}, \cdot >) l^{(k)},$$

再由 (27.11) 计算 $\delta\nabla\varphi$ 即可推出 (27.12) 式.

命题 27.5 若 $\varphi \in \mathbb{P}, \psi \in \mathbb{P}(H)$, 则 $\varphi\psi \in \mathbb{P}(H)$, 且

$$\delta(\varphi\psi) = \varphi\delta\psi - (\nabla\varphi, \psi). \tag{27.13}$$

若 $\varphi, \psi \in \mathbb{P}$, 则

$$\mathcal{L}(\varphi\psi) = \varphi\mathcal{L}\psi + \psi\mathcal{L}\varphi + 2(\nabla\varphi, \nabla\psi), \tag{27.14}$$

且
$$\mathbb{E}[\varphi\mathcal{L}\psi] = -\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\nabla\psi)] = \mathbb{E}[\psi\mathcal{L}\varphi]. \tag{27.15}$$

证 不妨设 $\psi = \sum_{k=1}^m \varphi_k h_k$, 其中 $\varphi_k \in \mathbb{P}, h_k \in H(k = 1,\cdots,m)$. 则 $\varphi\psi = \sum_{k=1}^m \varphi\varphi_k h_k$. 在 (27.11) 式中以 $\varphi\varphi_k$ 代 φ_k 并注意到微分公式 (27.6) 即得 (27.13). 由 (27.6) 及 (27.13) 可直接验证 (27.14) 式. 在 (27.10) 中以 $\nabla\psi$ 代 ψ 并注意到此式关于 φ,ψ 的对称性即得 (27.15) 式.

注 若 $\psi \equiv h \in H$ 为常向量场, 比较 (27.8) 及 (27.10) 式, 或直接由 (27.11) 式可知, $\delta h =< h,\cdot >$, 即 $\dot h$ 关于 w 的 Wiener 随机积分.

习题 5.2 对 $h \in H, \varphi \in \mathbb{P}$, 记
$$\nabla_h\varphi \equiv (\nabla\varphi, h), \qquad \delta_h\varphi \equiv \delta(\varphi h),$$
则 $\nabla_h\varphi + \delta_h\varphi =< h,\cdot > \varphi$; 若 $\psi \in \mathbb{P}$, 则
$$\mathbb{E}[\varphi\delta_h\psi] = \mathbb{E}[\psi\nabla_h\varphi].$$

为了建立 Wiener 泛函的 Sobolev 空间理论, 首先考虑 $L^2 = L^2(W,\overline{\mathcal{B}},\mu)$ 的 Wiener 浑沌分解. 回忆 Hermite 多项式的定义 (16.25):
$$h_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}), \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$
及性质 (16.36):
$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)h_m(x)\gamma(dx) = \delta_{mn}n!, \qquad n,m \in \mathbb{N}_0,$$
其中 $\gamma(dx) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)dx$. 可见多项式系 $\{(n!)^{-1/2}h_n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ 构成 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\gamma)$ 的标准正交基.

设 $\alpha = \{\alpha_k\}$ 为一列非负整数, 其中只有有限个不为零, 记 $|\alpha| \equiv \sum_k \alpha_k, \alpha! \equiv \prod_k(\alpha_k!)$, 并将这样的非负整数列总体记为 Λ. 任意固定 H 的一组标准正交基 $\{l^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 令
$$h_\alpha(w) \equiv \prod_k h_{\alpha_k}(< l^{(k)}, w >), \qquad \alpha = \{\alpha_k\} \in \Lambda, \tag{27.16}$$

因为上式无穷乘积中实际上只有有限项，所以 h_α 为多项式泛函.

命题 27.6 $\{(\alpha!)^{-1/2}h_\alpha(w), \alpha\in\Lambda\}$ 构成 L^2 的标准正交基.

证 由于 $\{< l^{(k)}, w >, k\in\mathbb{N}\}$ 在 Wiener 测度 μ 下为独立、同分布的 $N(0,1)$ 变量序列. 若 $\alpha=\{\alpha_k\}\in\Lambda, \beta=\{\beta_k\}\in\Lambda$, 则有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h_\alpha h_\beta] &= \int_W \prod_k h_{\alpha_k}(< l^{(k)}, w >)h_{\beta_k}(< l^{(k)}, w >)\mu(dw)\\ &= \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} h_{\alpha_k}(x)h_{\beta_k}(x)\gamma(dx) = \prod_k(\alpha_k!\delta_{\alpha_k\beta_k})\\ &= \alpha!\delta_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

命题得证.

若以 G_n 表示由多项式泛函族 $\{h_\alpha(w), |\alpha|=n\}$ 所生成的 L^2 的闭子空间，则重新得到了 Wiener 浑沌分解：

$$L^2=\bigoplus_{n=1}^{\infty}G_n, \tag{27.17}$$

其中 G_0 为常数所构成的闭子空间 (参看定理 16.6, 在那里用的是 Wiener 重积分表示). $G_1=\{< h, \cdot >; h\in H\}$ 和 H 等距同构. 以 J_n 表示到 G_n 的正交投影，则对一切 $f\in L^2$, 有[1)]

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}J_n f \qquad (L^2\text{收敛}).$$

仿照有限维情形 (参看 (26.20) 式), 我们可以定义无穷维空间 (Wiener 空间) 上的 Ornstein-Uhlenbeck 算子半群：

定义 27.7 对 $t\geq 0$ 及 $\varphi\in L^1$, 定义

$$T_t\varphi(w)\equiv\int_W \varphi(e^{-t}w+\sqrt{1-e^{-2t}}u)\mu(du). \tag{27.18}$$

---

1) Stroock[5] 给出了计算 $J_n f$ 的方法.

$\{T_t, t \geq 0\}$ 称为 Wiener 空间上的 **Ornstein-Uhlenbeck 半群**.

当 φ 为多项式泛函时，上式积分实际上是有限维的积分.

习题 5.3 证明对 $t \geq 0$ 有 $T_t\mathbb{P} \subset \mathbb{P}$, 且若 $\varphi \in \mathbb{P}, \varphi = \sum_n J_n\varphi$(实际上是有限和), 则

$$T_t\varphi = \sum_n e^{-nt} J_n\varphi, \qquad t \geq 0, \tag{27.19}$$

因而对 $s \geq 0$ 有

$$T_{t+s}\varphi = T_t(T_s\varphi). \tag{27.20}$$

若 $\tilde{\varphi} \in \mathbb{P}$, 则有

$$\mathbb{E}[\tilde{\varphi}T_t\varphi] = \mathbb{E}[\varphi T_t\tilde{\varphi}]. \tag{27.21}$$

如果对 $\varphi \in \mathbb{P}$, 定义此半群的生成算子为

$$\mathcal{L}\varphi \equiv \frac{d}{dt}[T_t\varphi]_{t=0} = -\sum_n nJ_n\varphi, \tag{27.22}$$

则此算子和 (27.9) 定义相一致. $N \equiv -\mathcal{L}$ 称为**计数算子**.

注 由于 $\mathbb{P}$ 在 L^2 中稠密，故 (27.19),(27.20) 及 (27.21) 在 L^2 中仍成立. 特别

$$G_n = \{\varphi \in L^2;\ T_t\varphi = e^{-nt}\varphi,\ \forall t \geq 0\},$$

因而 Wiener 混沌分解 (27.17) 实际上不依赖于正交基 $\{l^{(k)}\}$ 的选择. 如果设

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \equiv \{\varphi \in L^2;\ \sum_n n^2\|J_n\varphi\|^2_{L^2} < \infty\}, \tag{27.23}$$

则对 $\varphi \in \mathrm{Dom}\ (\mathcal{L})$, 仍有 (27.22) 式.

可以证明，对 $\forall p \in [1, \infty)$, $\{T_t, t \geq 0\}$ 是 L^p 上的压缩算子半群，但我们实际上可以得到更强的压缩性质，即所谓**超压缩性**:

定理 27.8 (Nelson[2]) 设 $p \in (1,\infty)$, $t>0$ 以及 $q(t) \equiv e^{2t}(p-1)+1>p$. 则对 $\varphi \in L^p$ 有

$$\|T_t\varphi\|_{q(t)} \le \|\varphi\|_p. \tag{27.24}$$

证 显然只须对有限维情形给以证明, 这里我们采用 Neveu[3] 的简单证明方法.

设 $W=\{W_t, 0\le t\le 1\}$ 及 $\widetilde{W}=\{\widetilde{W}_t, 0\le t\le 1\}$ 为任一概率空间上的相互独立的两个 d 维 Brown 运动, 生成 σ- 代数流 $\{\mathcal{F}_t, 0\le t\le 1\}$. $a\in(0,1)$, $q=a^{-2}(p-1)+1$, q^* 为 q 的共轭指数, 即 $q^{-1}+(q^*)^{-1}=1$. φ 与 ψ 为两个有界 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可测函数, 有正的下界. 作正交变换:

$$\begin{cases} W_t' = aW_t + \sqrt{1-a^2}\widetilde{W}_t & (0\le t\le 1), \\ \widetilde{W}_t' = \sqrt{1-a^2}W_t - a\widetilde{W}_t & (0\le t\le 1). \end{cases}$$

则 W' 及 $\widetilde{W}'$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 仍为 Brown 运动且相互独立 (参看习题 3.2). 注意

$$\mathbb{E}[\varphi(W_1')^p] = \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x))^p \gamma(dx) = \|\varphi\|_p^p,$$

其中 γ 为 d 维标准 Gauss 测度, $L^p = L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma)$. 同理, $\mathbb{E}[\psi(W_1)^{q^*}] = \|\psi\|_{q^*}^{q^*}$. 由随机积分表现定理, 存在 d 维循序可测过程 U 及 V 使

$$\varphi(W_1')^p = \|\varphi\|_p^p + \int_0^1 (U_s,\ dW_s'),$$

$$\psi(W_1)^{q^*} = \|\psi\|_{q^*}^{q^*} + \int_0^1 (V_s,\ dW_s).$$

应用伊藤公式于如下有界正鞅:

$$M_t \equiv \|\varphi\|_p^p + \int_0^t (U_s,\ dW_s'), \qquad 0\le t\le 1,$$

$$N_t \equiv \|\psi\|_{q^*}^{q^*} + \int_0^t (V_s,\ dW_s), \qquad 0 \le t \le 1,$$

得

$$\begin{aligned} d(M_t^{1/p} N_t^{1/q^*}) =& \frac{1}{p} M_t^{1/p-1} N_t^{1/q^*} dM_t + \frac{1}{q^*} M_t^{1/p} N_t^{1/q^*-1} dN_t \\ &+ \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{p} - 1\Big) M_t^{1/p-2} N_t^{1/q^*} d[M]_t \\ &+ \frac{1}{pq^*} M_t^{1/p-1} N_t^{1/q^*-1} d[M,N]_t \\ &+ \frac{1}{2q^*}\Big(\frac{1}{q^*} - 1\Big) M_t^{1/p} N_t^{1/q^*-2} d[N]_t. \end{aligned}$$

因

$$[M]_t = \int_0^t |U_s|^2 ds, \qquad [N]_t = \int_0^t |V_s|^2 ds,$$

$$[M,N]_t = a \int_0^t (U_s, V_s) ds,$$

故

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[M_1^{1/p} N_1^{1/q^*}] - \mathbb{E}[M_0^{1/p} N_0^{1/q^*}] \\ &= -\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\int_0^1 M_t^{1/p-2} N_t^{1/q^*-2} \Big\{\frac{1}{p}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) N_t^2 |U_t|^2 - \\ &\quad - \frac{2a}{pq^*} M_t N_t (U_t, V_t) + \frac{1}{q^*}\Big(1 - \frac{1}{q^*}\Big) M_t^2 |V_t|^2\Big\} dt\Big]. \end{aligned}$$

由于 $a^2 = (p-1)/(q-1) = (p-1)(q^*-1)$, 且 $(U,V)^2 \le |U|^2 |V|^2$, 上式右边花括弧内关于 M, N 的二次三项式非负，故

$$\mathbb{E}[M_1^{1/p} N_1^{1/q^*}] \le \mathbb{E}[M_0^{1/p} N_0^{1/q^*}], \tag{27.25}$$

又因 $W_t' = aW_t + \sqrt{1-a^2}\widetilde{W}_t$, 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_1^{1/p} N_1^{1/q^*}] &= \mathbb{E}[\varphi(W_1')\psi(W_1)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(ax + \sqrt{1-a^2}y) \psi(x) \gamma(dx) \gamma(dy). \end{aligned} \tag{27.26}$$

但

$$\mathbb{E}[M_0^{1/p}N_0^{1/q^*}] = \|\varphi\|_p\|\psi\|_{q^*}, \tag{27.27}$$

取 $a = e^{-t}$, $q(t) = a^{-2}(p-1)+1 = e^{2t}(p-1)+1$ 以代替上述 q, 比较 (27.25), (27.26) 及 (27.27), 即得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)T_t\varphi(x)\gamma(dx) \le \|\varphi\|_p\|\psi\|_{q(t)^*}. \tag{27.28}$$

对具有正下界的 φ, ψ 成立, 通过极限过程可知 (27.28) 式对一切非负的 φ, ψ 仍成立. 一般场合的讨论只须考虑其绝对值函数, 并注意 $|T_t\varphi(x)| \le T_t|\varphi|(x)$, 仍有 (27.28) 式. 这就表明 (27.24) 成立.

由上述超压缩性可得到两个有用的推论:

推论 1 对一切 $p \in (1,\infty)$, Wiener 混沌分解中的每个子空间 G_n, 也是 L^p 的闭子空间, 在其中一切 L^p 范数均等价.

证 任给 $q > p > 1$, 总存在 $t > 0$, 使 $q = e^{2t}(p-1)+1$. 对任意 $\alpha \in \Lambda, |\alpha| = n$, 由习题 5.2 可知 $T_t h_\alpha = e^{-nt}h_\alpha$, 再由定理 27.8 得

$$\|h_\alpha\|_p \ge \|T_t h_\alpha\|_q = e^{-nt}\|h_\alpha\|_q,$$

即

$$\|h_\alpha\|_q \le e^{nt}\|h_\alpha\|_p,$$

因而 $\{h_\alpha, |\alpha| = n\}$ 在一切 $L^p(p>1)$ 中的线性闭包均为 G_n.

推论 2 对一切 $p \in (1,\infty)$ 及 $n \in \mathbb{N}_0$, $J_n: L^p \longrightarrow G_n$ 为有界线性算子.

证 1° $p = 2$ 时显然成立.

2° $p > 2$ 时, J_n 在 L^p 的限制为连续. 实际上只要取 $t > 0$ 使 $p = e^{2t}(2-1)+1$, 则对 $\varphi \in L^p$ 有

$$\begin{aligned}\|e^{-nt}J_n\varphi\|_p = \|T_tJ_n\varphi\|_p &\le \|J_n\varphi\|_2 \\ &\le \|\varphi\|_2 \le \|\varphi\|_p,\end{aligned}$$

即

$$\|J_n\varphi\|_p \le e^{nt}\|\varphi\|_p.$$

3° $1 < p < 2$ 时，J_n 存在到 L^p 的连续开拓. 实际上只要考虑 p 的共轭指数 $q > 2$, 则对 $\varphi, \psi \in L^2$ 有

$$|\mathbb{E}[\psi J_n \varphi]| = |\mathbb{E}[\varphi J_n \psi]| \leq \|\varphi\|_p \|J_n \psi\|_q$$
$$\leq \|\varphi\|_p \cdot c\|\psi\|_q,$$

即

$$\|J_n \varphi\|_p \leq c\|\varphi\|_p.$$

§28. Wiener 泛函的 Sobolev 空间

为了将算子 Δ, δ 及 $\mathcal{L}$ 的定义域从多项式泛函推广到更一般的 Wiener 泛函甚至广义 Wiener 泛函上去, 先引入一族 Sobolev 范数.

给定一个实数序列 $\rho = \{r_n\}$, 在 $\mathbb{P}(E)$ 上可定义一个线性算子:

$$T_\rho \varphi \equiv \sum_n r_n J_n \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{P}(E). \tag{28.1}$$

例如, 对 $t \geq 0$, 令 $r_n = e^{-nt}$, 则得到 Ornstein-Uhlenbeck 半群算子 T_t; 当 $r_n = -n$ 时, T_ρ 就是 Ornstein-Uhlenbeck 算子 $\mathcal{L}$. 现对任意实数 s, 取 $r_n = (1+n)^{s/2}$, 对应的算子 T_ρ 记为 $(I-\mathcal{L})^{s/2}$:

$$(I-\mathcal{L})^{s/2}\varphi \equiv \sum_n (1+n)^{s/2} J_n \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{P}(E). \tag{28.2}$$

显然此算子具有对称性质 (因而可闭):

$$\mathbb{E}[((I-\mathcal{L})^{s/2}\varphi, \psi)_E] = \mathbb{E}[(\varphi, (I-\mathcal{L})^{s/2}\psi)_E],$$
$$\varphi, \psi \in \mathbb{P}(E). \tag{28.3}$$

对 $s \in \mathbb{R}$ 及 $p \in (1, \infty)$, 在 $\mathbb{P}(E)$ 上定义范数:

$$\|\varphi\|_{p,s}^E \equiv \|(I-\mathcal{L})^{s/2}\varphi\|_{L^p(E)}, \tag{28.4}$$

当 $E=\mathbb{R}$ 时，简记为 $\|\cdot\|_{p,s}$. 这一族范数具有以下性质:

命题 28.1 设 $\varphi,\psi,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\in\mathbb{P}(E)$; $s,s'\in\mathbb{R}$; $p,q,p'\in(1,\infty)$, 则有

1° 单调性: $p\le p', s\le s'\Longrightarrow\|\varphi\|_{p,s}^E\le\|\varphi\|_{p',s'}^E$;

2° 相容性: $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_{p,s}^E=0$, $\lim_{m,n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_m\|_{p',s'}^E=0\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_{p',s'}^E=0$;

3° 对偶性: $p^{-1}+q^{-1}=1\Longrightarrow$

$$\sup_{\varphi}\mathbb{E}[(\varphi,\psi)_E]=\|\psi\|_{q,-s}^E,$$

其中上确界是对一切满足 $\|\varphi\|_{p,s}^E\le 1$ 的一切 $\varphi\in\mathbb{P}(E)$ 而选取的.

证 1° 当 $s=s'$ 时单调性显然成立, 故只须考虑 $p=p', s\le s'$ 的情形. 为此, 又只须证明: 对 $\forall\alpha>0$ 有

$$\|(I-\mathcal{L})^{-\alpha}\varphi\|_p\le\|\varphi\|_p. \tag{28.5}$$

但由恒等式

$$(1+n)^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(e^{-nt})dt$$

及 (28.2) 和 (27.19) 式可知

$$(I-\mathcal{L})^{-\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(T_t\varphi)dt,$$

因而由 T_t 的压缩性质有

$$\|(I-\mathcal{L})^{-\alpha}\varphi\|_p\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\|T_t\varphi\|_p dt$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\|\varphi\|_p dt=\|\varphi\|_p.$$

2° 设 $\psi_n\equiv(I-\mathcal{L})^{s'/2}\varphi_n$, 则

$$\lim_{n,m\to\infty}\|\psi_n-\psi_m\|_{p'}=\lim_{n,m\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_m\|_{p',s'}^E=0,$$

由 $L^{p'}(E)$ 的完备性, $\exists\psi \in L^{p'}(E)$ 使

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\psi_n - \psi\|_{p'} = 0,$$

为证相容性，只须证 $\psi = 0$. 但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|(I-\mathcal{L})^{(s-s')/2}\psi_n\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|(I-\mathcal{L})^{s/2}\varphi_n\|_p \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{p,s}^E = 0,\end{aligned}$$

故对 $\forall\varphi \in \mathbb{P}(E)$ 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\varphi,\psi)_E] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\varphi,\psi_n)_E] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[((I-\mathcal{L})^{(s'-s)/2}\varphi, (I-\mathcal{L})^{(s-s')/2}\psi_n)_E] = 0,\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{P}(E)$ 在一切 $L^q(E)(1<q<\infty)$ 中稠密，故 $\psi = 0$.

3° 因对 $\varphi,\psi \in \mathbb{P}(E)$ 有

$$\mathbb{E}[(\varphi,\psi)_E] = \mathbb{E}[((I-\mathcal{L})^{s/2}\varphi, (I-\mathcal{L})^{-s/2}\psi)_E],$$

由 $L^p(E)$ 和 $L^q(E)$ 的对偶性及 $\mathbb{P}(E)$ 在 $L^p(E)$ 中的稠密性即得.

定义 28.2 对 $p \in (1,\infty), s \in \mathbb{R}$, 定义 $\mathbb{D}_s^p(E)$ 为 $\mathbb{P}(E)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{p,s}^E$ 完备化而得的 Banach 空间.

令

$$\mathbb{D}^{\infty}(E) \equiv \bigcap_{s>0}\bigcap_{1<p<\infty} \mathbb{D}_s^p(E), \tag{28.6}$$

$$\mathbb{D}^{-\infty}(E) \equiv \bigcup_{s>0}\bigcup_{1<p<\infty} \mathbb{D}_{-s}^p(E). \tag{28.7}$$

(当 $E = \mathbb{R}$ 时，上述空间记号中均略去 E)

由命题 28.1 可知，当 $p \le p', s \le s'$ 时有

$$\mathbb{D}_{s'}^{p'}(E) \hookrightarrow D_s^p(E). \tag{28.8}$$

因为 $\mathbb{D}_0^p(E)=L^p(E)$, 若将 $L^2(E)^*$ 和 $L^2(E)$ 视为同一, 则当 $p^{-1}+q^{-1}=1$ 时有

$$\mathbb{D}_s^p(E)^*=\mathbb{D}_{-s}^q(E), \tag{28.9}$$

且若 $1<p\le q<\infty, 0\le r\le s<\infty$, 则

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{D}_s^p(E) & \subset & \mathbb{D}_r^p(E) & \subset & L^p(E) & \subset & \mathbb{D}_{-r}^p(E) & \subset & \mathbb{D}_{-s}^p(E) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \mathbb{D}_s^q(E) & \subset & \mathbb{D}_r^q(E) & \subset & L^q(E) & \subset & \mathbb{D}_{-r}^q(E) & \subset & \mathbb{D}_{-s}^q(E) \end{array} \tag{28.10}$$

由此可见, 当 $s\ge 0$ 时, $\mathbb{D}_s^p(E)$ 中的元素均为 E 值 Wiener 泛函, 但当 $s<0$ 时, $\mathbb{D}_s^p(E)$ 中的元素未必都是 E 值 Wiener 泛函, 因此很自然地称为**广义 Wiener 泛函**.

显然, $\mathbb{D}^\infty(E)$ 为一可分 Fréchet 空间, 且 $\mathbb{D}^{-\infty}(E)$ 为它的对偶空间.

注 Wiener 泛函的 Sobolev 空间有许多不同的定义, 例如 Malliavin[6], Shigekawa[1] 和 Kusuoka-Stroock[1], 我们这里采用的是 Watanabe[1] 的定义. 然而 Sugita[2] 证明了这些定义都是等价的.

为了将算子的定义域从 $\mathbb{P}(E)'$ 开拓到 $L^p(E)$ $(1<p<\infty)$, Meyer[6] 证明了以下的 L^p乘子定理:

定理 28.3 设 $\rho=\{r_n\}$ 为一实数序列,

$$T_\rho\equiv\sum_n r_nJ_n:\ \mathbb{P}\longrightarrow\mathbb{P}. \tag{28.11}$$

若 $\exists n_0\in\mathbb{N}$ 及 $\beta>0$ 使

$$r_n=\sum_{k=0}^\infty a_k(n^{-\beta})^k,\qquad n\ge n_0, \tag{28.12}$$

其中实数序列 $\{a_k\}$ 满足

$$\sum_{k=0}^\infty |a_k|(n_0^{-\beta})^k<\infty, \tag{28.13}$$

则对一切 $p \in (1,\infty)$, T_p 可唯一地开拓为 L^p 上的有界线性算子.

注 此条件等价于: 存在一个于 0 点某邻域解析的函数 h 及 $\beta > 0$, 使

$$r_n = h(n^{-\beta}). \tag{28.14}$$

我们采用 Shigekawa[2] 的简化证明. 为此, 先证明一个引理.

引理 28.4 若 I 为恒等算子, $n \in \mathbb{N}$. 令

$$I_n \equiv I - J_0 - \cdots - J_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} J_k,$$

$$R_n \equiv \int_0^{\infty} T_t I_n dt = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} J_k.$$

则 $\forall p \in (1,\infty)$ 及 $n \in \mathbb{N}$, $\exists c = c(p,n) > 0$, 使 $\forall \varphi \in L^p$, $k \in \mathbb{N}$ 有

$$1^\circ \quad \|T_t I_n \varphi\|_p \le c e^{-nt} \|\varphi\|_p, \qquad t \ge 0; \tag{28.15}$$

$$2^\circ \quad \|R_n^k \varphi\|_p \le c n^{-k} \|\varphi\|_p. \tag{28.16}$$

证 1° $p = 2$ 时显然成立. 若 $p > 2$, 取 $t_0 > 0$ 使 $p = e^{2t_0} + 1$, 则 $\forall t \ge 0$ 由 OU 半群超压缩性有

$$\begin{aligned}
\|T_{t+t_0} I_n \varphi\|_p = \|T_{t_0} T_t I_n \varphi\|_p &\le \|T_t I_n \varphi\|_2 \\
&= \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \|e^{-kt} J_k \varphi\|_2^2\Big)^{1/2} \\
&\le e^{-nt} \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \|J_k \varphi\|_2^2\Big)^{1/2} \\
&\le e^{-nt} \|\varphi\|_2 \le e^{-nt} \|\varphi\|_p,
\end{aligned}$$

即对 $t \ge t_0$ 证明了 (28.15) 式. 当 $t < t_0$ 时, 由压缩性可得

$$\begin{aligned}
\|T_t I_n \varphi\|_p \le \|I_n \varphi\|_p &\le \|I_n\| \|\varphi\|_p \\
&\le e^{nt_0} \|I_n\| e^{-nt} \|\varphi\|_p,
\end{aligned}$$

于是 (28.15) 式仍成立.

若 $p<2$, 考虑其共轭指数, 类似于定理 27.8 推论 2 之证明可得 (28.15) 式.

2° 由 (28.15) 式可得 $\|R_n\varphi\|_p\le cn^{-1}\|\varphi\|_p$,

$$\begin{aligned}\|R_n^2\varphi\|_p&=\left\|\int_0^\infty\int_0^\infty T_tI_nT_sI_n\varphi dtds\right\|_p\\&=\left\|\int_0^\infty\int_0^\infty T_{t+s}I_n\varphi dtds\right\|_p\\&\le\int_0^\infty\int_0^\infty\|T_{t+s}I_n\varphi\|_p dtds\\&\le\|\varphi\|_p\int_0^\infty\int_0^\infty ce^{-n(t+s)}dtds\\&=cn^{-2}\|\varphi\|_p.\end{aligned}$$

依此类推, 可证 (28.16) 式.

定理 28.3 的证明 只须证 $\beta\le 1$ 的情形. 先设 $\beta=1$, 记 $T_\rho=T_1+T_2$, 其中

$$T_1\equiv\sum_{n=0}^{n_0-1}r_nJ_n,\qquad T_2\equiv\sum_{n=n_0}^{\infty}r_nJ_n.$$

由于 J_n 为 L^p 上有界线性算子 (定理 27.8 推论 2), 故 T_1 有界. 设 $n\ge n_0$, $\varphi_n\in G_n$. 因 $R_{n_0}\varphi_n=n^{-1}\varphi_n$, 故

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kR_{n_0}^k\varphi_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_kn^{-k}\varphi_n=r_n\varphi_n,$$

从而

$$T_2=\sum_{k=0}^{\infty}a_kR_{n_0}^k.$$

但由估计式 (28.16) 及条件 (28.13), 此算子级数依 L^p 范数收敛, 从而为 L^p 中有界算子.

对 $\beta<1$, 设 $\lambda_t^\beta(ds)$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 上的概率测度，满足

$$\int_0^\infty e^{-us}\lambda_t^\beta(ds)=\exp\{-u^\beta t\},\qquad u\geq 0, \tag{28.17}$$

即 β 阶单边稳定分布. 再令

$$T_t^\beta\equiv\int_0^\infty T_s\lambda_t^\beta(ds),\qquad t\geq 0. \tag{28.18}$$

因为 $\lambda_t^\beta*\lambda_s^\beta=\lambda_{t+s}^\beta$, 可以证明 $\{T_t^\beta,t\geq 0\}$ 为 L^p 中强连续压缩半群，且对 $\varphi_n\in G_n$ 有

$$\begin{aligned}T_t^\beta\varphi_n&=\int_0^\infty T_s\varphi_n\lambda_t^\beta(ds)\\&=\int_0^\infty e^{-ns}\varphi_n\lambda_t^\beta(ds)\\&=\exp\{-n^\beta t\}\varphi_n.\end{aligned} \tag{28.19}$$

以 T_t^β 代 T_t, 类似地可以证明定理结论.

作为 L^p 乘子定理的推论，我们有

推论 当 $s\leq 0$ 时，$(I-\mathcal{L})^{s/2}$ 可延拓为 $L^p(1<p<\infty)$ 上的有界线性算子.

证 因 $h(x)\equiv(x/(1+x))^{-s/2}$ 在 $x=0$ 附近解析，此时 $r_n=(1+n)^{s/2}=h(n^{-1})$, 由定理 28.3 立即得证.

§29. Meyer 不等式及其推论

我们知道，当 $\varphi\in\mathcal{P}(E)$ 时，$\nabla\varphi\in\mathcal{P}(H\bigotimes E)$. 一般地对 $k\in\mathbb{N}$ 有 $\nabla^k\varphi\in\mathcal{P}(H^{k\otimes}\bigotimes E)$. 为使记号简化，在不引起混淆的情形下，$L^p(E)$ 中的范数一律记为 $\|\cdot\|_p$, 而不论 E 是哪一个 Hilbert 空间 (例如 $L^p(H^{k\otimes})$ 中的范数仍记为 $\|\cdot\|_p$). 某线性空间中两范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$, 若存在常数 c, 使 $\|\cdot\|\leq c\|\cdot\|'$, 则记为 $\|\cdot\|\lesssim\|\cdot\|'$; 若 $\|\cdot\|\lesssim\|\cdot\|'$ 且 $\|\cdot\|'\lesssim\|\cdot\|$, 则称此二范数等价，并记为 $\|\cdot\|\sim\|\cdot\|'$.

仿有限维 Sobolev 空间理论，我们引进如下范数：

定义 29.1 对 $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $\varphi \in \mathbb{P}(E)$, 令

$$\|\varphi\|_{p,k}^{\sim} \equiv \left(\|\varphi\|_p^p + \sum_{j=1}^{k} \|\nabla^j \varphi\|_p^p\right)^{1/p}. \tag{29.1}$$

Meyer[6] 证明了这一族范数和定义 28.2 所引进的范数族是等价的. 这一结果是无穷维 Sobolev 空间理论的基础. 我们这里采用 Pisier[1] 的简化证明. 证明中要利用如下的 Hilbert 变换

$$\mathcal{H}f(x) \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{1}{\pi} \int_{N > |t| > \varepsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt \tag{29.2}$$

的性质，即：变换 $\mathcal{H}$ 在一切 $L^p(\mathbb{R})(1 < p < \infty)$ 中为有界线性算子 (例如参看 Stein[1] 或 Bass[1]).

我们先给出两个简单的引理：

引理 29.2 在 $\mathbb{P}(E)$ 上有

$$\nabla J_0 = 0, \qquad \nabla J_n = J_{n-1}\nabla, \qquad n \ge 1. \tag{29.3}$$

对 $\rho = \{r_n\}$, 令 $\rho^+ \equiv \{r_{n+1}\}$, 则

$$\nabla T_\rho = T_{\rho^+}\nabla, \tag{29.4}$$

其中 T_ρ 由 (28.11) 定义.

证 注意 Hermite 多项式 $\{h_n(x)\}$ 满足 $h_n'(x) = nh_{n-1}(x)$, 即可验证上述等式.

引理 29.3 记

$$Q \equiv (I - \mathcal{L})^{-1/2} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-1/2} J_n, \tag{29.5}$$

则

$$Q = \pi^{-1/2} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} T_t dt. \tag{29.6}$$

证 投影到每个子空间 G_n, 此式归结为以下的恒等式:

$$(n+1)^{-1/2}=\pi^{-1/2}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-(n+1)t}dt.$$

在以下证明中, c_p 和 $\tilde{c}_p$ 表示仅依赖于 p 的常数, 但在不同场合可能不相等.

命题 29.4 $\forall p\in(1,\infty)$, $\exists c_p>0$ 使 $\forall\varphi\in\mathbb{P}$ 有

$$\|Q\varphi\|_{p,1}^{\sim}\le c_p\|\varphi\|_p. \tag{29.7}$$

证 对 $\theta\in[0,\pi/2)$ 作变换 $t=|\log\cos\theta|=-\log\cos\theta$, $e^{-t}=\cos\theta$. 以 N 表示计数算子, 则

$$T_t=e^{-tN}=(\cos\theta)^N,$$

$$Q=\pi^{-1/2}\int_0^{\pi/2}|\log\cos\theta|^{-1/2}(\cos\theta)^N\sin\theta d\theta. \tag{29.8}$$

对 $w,u\in W$, 令

$$R_\theta\varphi(w,u)\equiv\varphi(w\cos\theta+u\sin\theta).$$

则由 (27.18) 可知

$$(T_t\varphi)(w)=\mathbb{E}^u[R_\theta\varphi(w,u)], \tag{29.9}$$

其中 $\mathbb{E}^u$ 表示对 u 关于测度 μ 的积分. 由 Gauss 测度旋转不变性

$$\mathbb{E}^w\mathbb{E}^u[|R_\theta\varphi(w,u)|^p]=\mathbb{E}^w\mathbb{E}^u[|R_0\varphi|^p]=\|\varphi\|_p^p<\infty$$

为不依赖于 θ 的常数, 从而

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|R_\theta\varphi(w,u)|^pd\theta<\infty,\qquad \text{a.e.}(\mu\times\mu)$$

即对 μ–a.e. w 及 $u, R_\theta\varphi(w,u) \in L^p(-\pi/2,\pi/2)$. 对 $h \in H$, 以 $\nabla_h\varphi \equiv (\nabla\varphi, h)$ 表示 φ 沿 h 方向的导数，则

$$\nabla_h^u R_\theta\varphi(w,u) = \sin\theta R_\theta \nabla_h\varphi(w,u),$$

其中 ∇_h^u 表示关于变量 u 的方向导数，由 (29.9) 式

$$\begin{aligned} E^u[\nabla_h^u R_\theta\varphi] &= \sin\theta E^u[R_\theta\nabla_h\varphi] \\ &= \sin\theta(\cos\theta)^N\nabla_h\varphi \\ &= \sum_n \sin\theta\cos^n\theta J_n\nabla_h\varphi. \end{aligned} \tag{29.10}$$

令

$$f(\theta) \equiv \frac{1}{2}|\pi\log\cos\theta|^{-1/2}\cos\theta\mathrm{sgn}\theta. \tag{29.11}$$

因 f 在 0 点附近的阶为 θ^{-1}, 故可表示为

$$f(\theta) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta} + r(\theta)\Big)\mathrm{sgn}\theta,$$

其中 $r(\theta)$ 为有界函数．再令

$$\psi(w,u) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}\geq|\theta|>\varepsilon} f(\theta)R_\theta\varphi(w,u)d\theta. \tag{29.12}$$

我们要证明此极限在 $L^p(\mu\times\mu)$ 中存在．由 Hilbert 变换 (29.2) 在 $L^p(-\pi/2,\pi/2)$ 中的有界性，$\exists c_p > 0$ 使

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}\geq|\theta'|>\varepsilon} f(\theta')R_{\theta+\theta'}\varphi(w,u)d\theta'\Big|^p d\theta \\ &\leq c_p\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|R_\theta\varphi(w,u)|^p d\theta, \qquad \text{a.e.}(\mu\times\mu). \end{aligned}$$

再由 Gauss 测度 μ 的旋转不变性

$$\begin{aligned} &E^w E^u\Big[\Big|\int_{\frac{\pi}{2}\geq|\theta|>\varepsilon} f(\theta)R_\theta\varphi(w,u)d\theta\Big|^p\Big] \\ &= E^w E^u\Big[\Big|\int_{\frac{\pi}{2}\geq|\theta'|>\varepsilon} f(\theta')R_{\theta+\theta'}\varphi(w,u)d\theta'\Big|^p\Big], \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 (29.12) 中的极限在 $L^p(\mu\times\mu)$ 中存在，且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^w\mathbb{E}^u[|\psi(w,u)|^p]\\
&\le c_p\mathbb{E}^w\mathbb{E}^u[|R_\theta\varphi(w,u)|^p]\\
&= c_p\|\varphi\|_p^p.
\end{aligned} \tag{29.13}$$

以 J_1^u 表示对变量 u 而言到 Wiener 混沌分解的子空间 G_1 的投影，则对 $h\in H$, 由 (27.8),(29.10),(29.11) 及 (29.3) 式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^u[< h,u > J_1^u\psi(w,u)]\\
&= \mathbb{E}^u[< h,u > \psi(w,u)]\\
&= \mathbb{E}^u[\nabla_h^u\psi(w,u)]\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta)\mathbb{E}^u[\nabla_h^u R_\theta\varphi(w,u)]d\theta\\
&= \sum_n\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta)\sin\theta\cos^n\theta d\theta\right)J_n\nabla_h\varphi(w)\\
&= \sum_n (n+2)^{-1/2}J_n\nabla_h\varphi(w)\\
&= \nabla_h\sum_n (n+1)^{-1/2}J_n\varphi(w)\\
&= \nabla_h Q\varphi(w), \qquad \text{a.e.}(\mu).
\end{aligned}$$

因 $\nabla_h Q\varphi = (\nabla Q\varphi, h)_H$ 且 G_1 与 H 等距同构，故

$$\|\nabla Q\varphi(w)\|_H^2 = \mathbb{E}^u[|J_1^u\psi(w,u)|^2], \qquad \text{a.e.}(\mu).$$

注意到 J_1^u 在 L^p 中有界性以及在 G_1 中一切 L^p 范数等价性 (定理 27.8 之推论), 可知 $\exists c_p > 0$ 使得

$$\|\nabla Q\varphi(w)\|_H^p \le c_p\mathbb{E}^u[|\psi(w,u)|^p], \qquad \text{a.e.}(\mu).$$

对 w 关于 μ 积分并由 (29.13) 式可得

$$\|\nabla Q\varphi\|_p \le c_p\|\varphi\|_p. \tag{29.14}$$

由定理 28.3 之推论， $Q\equiv(I-\mathcal{L})^{-1/2}$ 可延拓为 L^p 上有界线性算子，故 $\exists c_p>0$ 使

$$\|Q\varphi\|_p\le c_p\|\varphi\|_p,$$

结合 (29.14) 式即得 (29.7) 式.

利用对偶性，容易得到相反的不等式.

命题 29.5 $\forall p\in(1,\infty)$, $\exists\widetilde{c}_p>0$ 使 $\forall\varphi\in\mathbb{P}$ 有

$$\|\varphi\|_p\le\widetilde{c}_p\|Q\varphi\|^{\sim}_{p,1}. \tag{29.15}$$

证 因为 $Q^{-2}=I-\mathcal{L}=I+\delta\nabla$, 故对 $\varphi,\psi\in\mathbb{P}$ 有

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)&=(Q^{-1}Q\varphi,Q^{-1}Q\psi)=(Q^{-2}Q\varphi,Q\psi)\\&=(Q\varphi,Q\psi)+(\delta\nabla Q\varphi,Q\psi)\\&=(Q\varphi,Q\psi)+(\nabla Q\varphi,\nabla Q\psi).\end{aligned}$$

从而对 $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\exists c_{pq}>0$ 使

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)&\le\|Q\varphi\|_p\|Q\psi\|_q+\|\nabla Q\varphi\|_p\|\nabla Q\psi\|_q\\&\le c_{pq}\|Q\varphi\|^{\sim}_{p,1}\|Q\psi\|^{\sim}_{q,1}.\end{aligned}$$

但由 (29.7) 式

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p&=\sup\{|(\varphi,\psi)|;\|\psi\|_q\le1\}\\&\le\sup\{|(\varphi,\psi)|;\|Q\psi\|^{\sim}_{q,1}\le c_q\}\\&\le c_{pq}c_q\|Q\varphi\|^{\sim}_{p,1}.\end{aligned}$$

由此即得 (29.15) 式.

由定义 (28.4) 式， $\|\varphi\|_{p,1}\equiv\|Q^{-1}\varphi\|_p$. 以上两个命题表明范数 $\|\cdot\|^{\sim}_{p,1}$ 和 $\|\cdot\|_{p,1}$ 等价. 下面将此结果推广到高阶导数，这就是重要的 Meyer 不等式.

定理 29.6 (Meyer 不等式) 对 $p\in(1,\infty)$ 及 $k\in\mathbb{N}$, $\exists c_{k,p}>0$ 及 $\widetilde{c}_{k,p}>0$, 使 $\forall\varphi\in\mathbb{P}$ 有

$$\widetilde{c}_{k,p}\|\varphi\|_p\le\|Q^k\varphi\|^{\sim}_{p,k}\le c_{k,p}\|\varphi\|_p. \tag{29.16}$$

亦即范数 $\|\cdot\|^{\sim}_{p,k}$ 和 $\|\cdot\|_{p,k}$ 等价.

证 用归纳法. 对任意 Hilbert 空间 E 定义算子

$$\Gamma : \mathbb{P}(E) \longrightarrow L^p(E) \bigoplus L^p(H \bigotimes E)$$

为

$$\Gamma\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \nabla\varphi \end{pmatrix},$$

则 $\forall k \geq 1$ 有 $\nabla\Gamma^k = \Gamma^k\nabla$, 且由 (29.7) 及 (29.15) 式可知, $\Gamma Q : L^p(E) \longrightarrow L^p(E) \bigoplus L^p(H \bigotimes E)$ 为有界算子且具有有界逆. 由定义

$$\|\Gamma\varphi\|_p \sim \|\varphi\|^{\sim}_{p,1},$$

对 k 用归纳法可证明

$$\begin{aligned} \|\Gamma^k\varphi\|_p &\sim \|\varphi\|_{p,k-1} + \|\nabla\varphi\|_{p,k-1} \\ &\sim \|\varphi\|^{\sim}_{p,k}, \end{aligned} \tag{29.17}$$

令

$$M \equiv (2-\mathcal{L})^{1/2}(1-\mathcal{L})^{-1/2} = \sum_n \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1/2} J_n.$$

由于 $h(x) = \left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/2}$ 及 $h^{-1}(x)$ 均在零点附近解析, 令 $r_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{1/2} = h(n^{-1})$. 由定理 28.3 可知 M 及 M^{-1} 均可延拓为 $L^p(E)$ 中的有界算子. 对 $k \geq 1$ 令

$$A_k \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-k} \end{pmatrix},$$

则 A_k 及 A_k^{-1} 在 $L^p(E) \bigoplus L^p(H \bigotimes E)$ 中有界, 且由引理 29.2 可知

$$\Gamma Q^k = Q^k A_k \Gamma.$$

若令 $B_k \equiv \Gamma^k Q^k$, 则 $B_1 = \Gamma Q$ 有界, 且

$$\begin{aligned} B_k &= \Gamma^{k-1}\Gamma Q^{k-1} Q \\ &= \Gamma^{k-1} Q^{k-1} A_{k-1} B_1 \\ &= B_{k-1} A_{k-1} B_1. \end{aligned}$$

对 k 用归纳法可证明 B_k 及 B_k^{-1} 均有界, 于是由 (29.17) 式得

$$\begin{aligned} \|Q^k \varphi\|_{p,k}^{\sim} &\sim \|\Gamma^k Q^k \varphi\|_p \\ &= \|B_k \varphi\|_p \\ &\sim \|\varphi\|_p. \end{aligned}$$

此即 Meyer 不等式 (29.16).

由 Meyer 不等式, 我们有以下推论:

命题 29.7 梯度算子 ∇ 可唯一延拓为 $\mathbb{D}^{-\infty}(E)$ 到 $\mathbb{D}^{-\infty}(H \bigotimes E)$ 中的线性算子, 使 $\forall p \in (1, \infty)$ 及 $s \in \mathbb{R}$,

$$\nabla : \mathbb{D}_{s+1}^p(E) \longrightarrow \mathbb{D}_s^p(H \bigotimes E) \tag{29.18}$$

为连续. 特别

$$\nabla : \mathbb{D}^\infty(E) \longrightarrow \mathbb{D}^\infty(H \bigotimes E)$$

为连续.

证 由 (29.7) 式知, $\forall \varphi \in \mathbb{P}(E)$

$$\|Q \nabla \varphi\|_p \lesssim \|\varphi\|_p.$$

从而

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi\|_{p,s} = \|Q^{-s} \nabla \varphi\|_p &= \|Q^{-s-1} Q \nabla \varphi\|_p \\ &\lesssim \|Q^{-s-1} \varphi\|_p = \|\varphi\|_{p,s+1}. \end{aligned}$$

于是 ∇ 存在连续延拓 (29.18).

由 δ 和 ∇ 的对偶性, 有

命题 29.8 散度算子 δ 可唯一延拓为 $\mathbb{D}^{-\infty}(H\bigotimes E)$ 到 $\mathbb{D}^{-\infty}(E)$ 中的线性算子，使 $\forall p\in(1,\infty)$ 及 $s\in\mathbb{R}$,

$$\delta:\mathbb{D}^p_{s+1}(H\bigotimes E)\longrightarrow\mathbb{D}^p_s(E) \tag{29.19}$$

为连续. 特别

$$\delta:\mathbb{D}^\infty(H\bigotimes E)\longrightarrow\mathbb{D}^\infty(E)$$

为连续.

因为 OU 算子 $\mathcal{L}=-\delta\nabla$, 于是有

命题 29.9 OU 算子 $\mathcal{L}$ 可唯一延拓为 $\mathbb{D}^{-\infty}(E)$ 到 $\mathbb{D}^{-\infty}(E)$ 中的线性算子，使 $\forall p\in(1,\infty)$ 及 $s\in\mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}:\mathbb{D}^p_{s+2}(E)\longrightarrow\mathbb{D}^p_s(E) \tag{29.20}$$

为连续，特别

$$\mathcal{L}:\mathbb{D}^\infty(E)\longrightarrow\mathbb{D}^\infty(E)$$

为连续.

命题 29.10 若 E_1,E_2 为可分 Hilbert 空间， $p,q\in(1,\infty),k\in\mathbb{N}$ 且 $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}<1$, 则 $\exists c=c(p,q,k)>0$, 对一切 $\varphi\in\mathbb{P}(E_1)$, $\psi\in\mathbb{P}(E_2)$ 有

$$\|\varphi\otimes\psi\|_{r,k}\le c\|\varphi\|_{p,k}\|\psi\|_{q,k}, \tag{29.21}$$

从而映射

$$(\varphi,\psi)\longmapsto\varphi\otimes\psi$$

可延拓为 $\mathbb{D}^p_k(E_1)\times\mathbb{D}^q_k(E_2)\longrightarrow\mathbb{D}^r_k(E_1\bigotimes E_2)$ 的连续双线性映射. 特别，若 $E_1=E_2=\mathbb{R}$, $\varphi,\psi\in\mathbb{D}^\infty$, 则 $\varphi\psi\in\mathbb{D}^\infty$, 从而 $\mathbb{D}^\infty$ 为一拓扑代数.

证 容易验证:

$$\nabla(\varphi\otimes\psi)=(\nabla\varphi)\otimes\psi+\varphi\otimes\nabla\psi.$$

且一般地对 $k\in\mathbb{N}$ 有

$$\nabla^k(\varphi\otimes\psi)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\nabla^j\varphi)\otimes(\nabla^{k-j}\psi). \tag{29.22}$$

注意 $\|\varphi\otimes\psi\|_{E_1\otimes E_2}=\|\varphi\|_{E_1}\|\psi\|_{E_2}$, 由 Meyer 不等式及 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\|\varphi\otimes\psi\|_{r,k}&\lesssim\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j(\varphi\otimes\psi)\|_r\\&\lesssim\Big(\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\varphi\|_p\Big)\Big(\sum_{j=0}^{k}\|\nabla^j\psi\|_q\Big)\\&\lesssim\|\varphi\|_{p,k}\|\psi\|_{q,k},\end{aligned}$$

(29.21) 式得证.

复合泛函微分公式, 分部积分公式等均可推广到相应的 Sobolev 空间上去. 我们将其归纳为如下命题, 读者试自行证明之.

命题 29.11 若 $f\in C_{\nearrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n),\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in\mathbb{D}^\infty$, 则 $\varphi\equiv f(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\in\mathbb{D}^\infty$, 且

$$\nabla\varphi=\sum_{j=1}^{n}\partial_jf(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\nabla\varphi_j, \tag{29.23}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varphi=&\sum_{j=1}^{n}\partial_jf(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\mathcal{L}\varphi_j\\&+\sum_{j,k=1}^{n}\partial_j\partial_kf(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k)_H.\end{aligned} \tag{29.24}$$

若 $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{D}^\infty$, $\psi\in\mathbb{D}^\infty(H)$, 则

$$\mathbb{E}[(\nabla\varphi,\psi)_H]=\mathbb{E}[\varphi\delta\psi], \tag{29.25}$$

$$\delta(\varphi\psi)=\varphi\delta\psi-(\nabla\varphi,\psi)_H, \tag{29.26}$$

$$\delta(\varphi_1\nabla\varphi_2)=-\varphi_1\mathcal{L}\varphi_2-(\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_2)_H, \tag{29.27}$$

$$\mathcal{L}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\mathcal{L}\varphi_2 + \varphi_2\mathcal{L}\varphi_1 + 2(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_H, \tag{29.28}$$

$$\mathbb{E}[\varphi_1\mathcal{L}\varphi_2] = -\mathbb{E}[(\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)_H] = \mathbb{E}[\varphi_2\mathcal{L}\varphi_1]. \tag{29.29}$$

此外，分部积分公式 (29.25) 还可以推广到广义泛函. 例如，对 $\varphi \in \mathbb{D}^{-\infty}$, $\psi \in \mathbb{D}^{\infty}(H)$ 有

$$< \nabla\varphi,\ \psi > = < \varphi,\ \delta\psi >, \tag{29.30}$$

式中两边分别为 $\mathbb{D}^{-\infty}(H) \times \mathbb{D}^{\infty}(H)$ 及 $\mathbb{D}^{-\infty} \times \mathbb{D}^{\infty}$ 上的典则双线性型. 值得注意的是， $\mathbb{D}^{-\infty} \times \mathbb{D}^{\infty}$ 上的典则双线性型 $< \cdot, \cdot >$ 可以看作期望的自然推广：若 $\varphi \in \mathbb{D}^{-\infty}$, 则 $< \varphi, 1 >$ 是广义泛函的广义期望.

§30. Wiener 泛函与广义函数的复合，分布密度的光滑性

如果 φ 是一个 $\mathbb{R}^m$ 值 Wiener 泛函，那么，它在 $\mathbb{R}^m$ 中的分布就是 $\mu \circ \varphi^{-1}$, 对 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mu \circ \varphi^{-1}(B) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B(\varphi(w))].$$

如果它的密度 (即关于 $\mathbb{R}^m$ 中 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) $p(x)$ 存在，则

$$p(x) = \mathbb{E}[\delta_x(\varphi(w))],$$

其中 δ_x 为 Dirac 的 δ 函数. 显然， $\delta_x(\varphi(w))$ 不是通常意义下的 Wiener 泛函. 为了使它具有意义并能计算它的期望值, 我们首先要研究广义函数和 Wiener 泛函的复合.

先叙述 Schwartz 广义函数的一些基本概念. 详细叙述和证明可参看 Gelfand-Silov[1].

设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$ 为多重指标，并记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m,\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_m!$; 对 $x\in\mathbb{R}^m$, 记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m},D^\alpha=i^{-|\alpha|}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_m^{\alpha_m}$. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)\equiv\{&f\in C^\infty(\mathbb{R}^m);\\ &\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\alpha D^\beta f(x)|<\infty\quad\forall a,\beta\in\mathbb{N}_0^m\}\end{aligned}\tag{30.1}$$

为急减 C^∞ 函数空间，在其中定义一族半范数:

$$\|f\|_{\alpha,\beta}\equiv\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\alpha D^\beta f(x)|,\qquad a,\beta\in\mathbb{N}_0^m,\tag{30.2}$$

则它是一个 Fréchet 空间. 对 $f\in\mathcal{S}$, 定义其 Fourier 变换为

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^m}e^{-i(\xi,x)}f(x)dx,\qquad\xi\in\mathbb{R}^m,\tag{30.3}$$

则 $f\longmapsto\widehat{f}$ 为 $\mathcal{S}$ 到自身的线性拓扑同构. 在积分号下求导数，并利用分部积分公式，可得

$$(\widehat{D^\alpha f})(\xi)=\xi^\alpha\widehat{f}(\xi),\tag{30.4}$$

$$(\widehat{x^\alpha f})(\xi)=(-D)^\alpha\widehat{f}(\xi).\tag{30.5}$$

从 (30.4) 及 (30.5) 看出

$$(1+\widehat{|x|^2-}\Delta)f(\xi)=(1+|\xi|^2-\Delta)\widehat{f}(\xi).\tag{30.6}$$

如果定义

$$\|f\|_{2k}\equiv\|(1+|x|^2-\Delta)^kf\|_{L^\infty},\qquad k\in\mathbb{N}_0,\tag{30.7}$$

则得到一族与 (30.2) 等价的范数. 在 $\mathcal{S}$ 中采取这族范数的好处是: 1° 它使得 $\mathcal{S}$ 在 Fourier 变换之下对称; 2° 利用 L^2 的正交分

解 (我们前面对 Wiener 泛函正是这样做的), 便于推广到 k 为负整数的情形.

$\mathcal{S}$ 上的连续线性泛函称为 **缓增广义函数** (tempered distributions), 其总体记为 $\mathcal{S}^*$. 因为 $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$, 故有 $\mathcal{S}^* \hookrightarrow \mathcal{D}^*$($\mathcal{D}^*$ 为广义函数空间, 定义参看 §17). 对 $k \in \mathbb{Z}$, 以 $\mathcal{T}_{2k}$ 表示 $\mathcal{S}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{2k}$ 的完备化而得到的 Banach 空间, 则有以下关系:

$$\mathcal{S} \subset \cdots \mathcal{T}_2 \hookrightarrow \mathcal{T}_0 = \widehat{C}(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{T}_{-2} \cdots \subset \mathcal{S}^*, \tag{30.8}$$

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_{2k}, \qquad \mathcal{S}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_{-2k}, \tag{30.9}$$

其中 $\widehat{C}(\mathbb{R}^m)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中满足 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ 的连续函数所构成的 Banach 空间 (以上确界为范数).

我们已经知道, 当 $\varphi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ 时, 其复合函数 $f \circ \varphi \in \mathbb{D}^\infty$. 若将 φ 固定, 则映象: $f \longmapsto f \circ \varphi$ 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{D}^\infty$ 之连续线性映象, 现在我们要将其开拓为 $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{D}^{-\infty}$ 之映象.

定义 30.1 $\varphi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$ 称为 **光滑的 m 维 Wiener 泛函**. 即 $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$, $\varphi^k \in \mathbb{D}^\infty (k = 1, \cdots, m)$. 此时, 令

$$\sigma^{ij}(w) \equiv (\nabla\varphi^i(w), \nabla\varphi^j(w))_H \quad i, j = 1, \cdots, m, \tag{30.10}$$

$\mathbf{\Sigma}(w) = (\sigma^{ij}(w))_{1\le i,j\le m}$ 称为 φ 的 **Malliavin 协方差矩阵**. 若 $\det \mathbf{\Sigma}(w) > 0$ a.e. $[\mu]$ 且

$$[\det \mathbf{\Sigma}(w)]^{-1} \in L^{\infty-} \equiv \bigcap_{1<p<\infty} L^p, \tag{30.11}$$

则称 φ(或矩阵 $\mathbf{\Sigma}$)在 **Malliavin 意义下非退化**.

显然, 若 $\varphi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$, 则 $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^m)$; 若它在 Malliavin 意义下非退化, 则其逆矩阵

$$\mathbf{\Gamma}(w) = [\mathbf{\Sigma}(w)]^{-1} = (\gamma_{ij}(w))_{1\le i,j\le m} \tag{30.12}$$

a.e. $[\mu]$ 存在，且对 $\forall i,j=1,\cdots,m$, $\gamma_{ij}\in \mathbb{D}^{\infty}$.

定理 30.2 (Watanabe) 若 $\varphi\in \mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ 且在 Malliavin 意义下非退化，则对 $\forall p\in(1,\infty)$ 及 $k\in \mathbb{N}_0, \exists c=c(p,k)>0$, 使对于 $\forall f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\|f\circ\varphi\|_{p,-2k}\le c\|f\|_{-2k}, \tag{30.13}$$

因而映象 $f\longmapsto f\circ\varphi$ 可唯一地开拓为 $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)\longrightarrow \mathbb{D}^{-\infty}$ 之线性映象，且对 $\forall p\in(1,\infty)$ 及 $k\in \mathbb{N}_0$, 限制于 $\mathcal{T}_{-2k}$ 时，它是 $\mathcal{T}_{-2k}\longrightarrow \mathbb{D}^p_{-2k}$ 的连续线性映象.

证 对 $f\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, 由 (29.23) 有

$$\nabla(f\circ\varphi)=\sum_{i=1}^m(\partial_i f\circ\varphi)\nabla\varphi^i$$

及

$$\begin{aligned}(\nabla(f\circ\varphi),\nabla\varphi^j)_H&=\sum_{i=1}^m(\partial_i f\circ\varphi)(\nabla\varphi^i,\nabla\varphi^j)_H\\&=\sum_{i=1}^m(\partial_i f\circ\varphi)\sigma^{ij}\qquad(j=1,\cdots,m),\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\Sigma}$ 非退化，解此线性方程组可得

$$\partial_i f\circ\varphi=\sum_{j=1}^m\gamma_{ij}(\nabla(f\circ\varphi),\ \nabla\varphi^j)_H\qquad(i=1,\cdots,m), \tag{30.14}$$

因此，对 $\psi\in \mathbb{D}^q_k$ $(1<q<\infty,\ k\in \mathbb{N}_0)$, 由 (29.25) 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\psi(\partial_i f\circ\varphi)]&=\sum_{j=1}^m \mathbb{E}[(\nabla(f\circ\varphi),\gamma_{ij}\psi\nabla\varphi^j)_H]\\&=\sum_{j=1}^m \mathbb{E}[(f\circ\varphi)\delta(\gamma_{ij}\psi\nabla\varphi^j)]\qquad(i=1,\cdots,m).\end{aligned}$$

令

$$\Phi_i(\psi;w) \equiv \sum_{j=1}^{m} \delta(\gamma_{ij}(w)\psi(w)\nabla\varphi^j(w)) \qquad (i=1,\cdots,m),$$

则由 (29.26) 及

$$\nabla\gamma_{ij} = -\sum_{l,n=1}^{m} \gamma_{il}\gamma_{jn}\nabla\sigma^{ln} \qquad (i,j=1,\cdots,m),$$

(可由恒等式 $\gamma_{ij}=\sum_{l,n=1}^{m}\gamma_{il}\sigma^{ln}\gamma_{nj}$ 微分而得) 可知

$$\begin{aligned}\Phi_i(\psi) &= -\sum_{j=1}^{m}\{\psi(\nabla\gamma_{ij},\nabla\varphi^j)_H + \gamma_{ij}(\nabla\psi,\nabla\varphi^j)_H + \gamma_{ij}\psi\mathcal{L}\varphi^j\}\\ &= -\sum_{j=1}^{m}\Big\{-\sum_{l,n=1}^{m}\psi\gamma_{il}\gamma_{jn}(\nabla\sigma^{ln},\nabla\varphi^j)_H\\ &\qquad + \gamma_{ij}(\nabla\psi,\nabla\varphi^j)_H + \gamma_{ij}\psi\mathcal{L}\varphi^j\Big\} \qquad (i=1,\cdots,m).\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}(\nabla\sigma^{ln},\nabla\varphi^j)_H &= (\nabla(\nabla\varphi^l,\nabla\varphi^n)_H,\nabla\varphi^j)_H\\ &= (\nabla^2\varphi^l,\nabla\varphi^n\otimes\nabla\varphi^j)_{H\otimes H}\\ &\quad + (\nabla^2\varphi^n,\nabla\varphi^l\otimes\nabla\varphi^j)_{H\otimes H},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&|(\nabla\sigma^{ln},\nabla\varphi^j)_H|\\ &\le (\|\nabla^2\varphi^l\|_{H\otimes H}\|\nabla\varphi^n\|_H + \|\nabla^2\varphi^n\|_{H\otimes H}\|\nabla\varphi^l\|_H)\|\nabla\varphi^j\|_H,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|\Phi_i(\psi)| \le &\sum_{j,l,n=1}^{m}|\psi||\gamma_{il}||\gamma_{jn}|(\|\nabla^2\varphi^l\|_{H\otimes H}\|\nabla\varphi^n\|_H\\ &+ \|\nabla^2\varphi^n\|_{H\otimes H}\|\nabla\varphi^l\|_H)\|\nabla\varphi^j\|_H\\ &+ \sum_{j=1}^{m}|\gamma_{ij}|(\|\nabla\psi\|_H\|\nabla\varphi^j\|_H + |\psi||\mathcal{L}\varphi^j|)\\ &\qquad (i=1,\cdots,m).\end{aligned}$$

由假定， $|\gamma_{ij}|, \|\nabla\varphi^j\|_H, \|\nabla^2\varphi^j\|_{H\otimes H}, |\mathcal{L}\varphi^j| \in L^{\infty-}; |\psi|, \|\nabla\psi\|_H \in L^q$, 因而 $\forall\varepsilon>0, \exists r>q-\varepsilon$, 使 $|\Phi_i(\psi)|\in L^r$, 且对一切 $f\in C_b^k(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\mathbb{E}[\psi(\partial_i f\circ\varphi)] = \mathbb{E}[(f\circ\varphi)\Phi_i(\psi)], \quad i=1,\cdots,m, \tag{30.15}$$

此外

$$\sup\{\|\Phi_i(\psi)\|_{L^r}; \psi\in\mathbb{D}_k^q, \|\psi\|_{q,k}\le 1\}<\infty, \tag{30.16}$$

再以 $\partial_i f$ 代 f, 以 $\Phi_i(\psi)$ 代 ψ, 依此类推. 可在 (30.15) 及 (30.16) 中将 i 代之以任何多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(|\alpha|=k)$. 特别, 设 $q>1$ 满足 $q^{-1}+p^{-1}=1$, 则对 $k\in\mathbb{N}, \psi\in\mathbb{D}_{2k}^q, \exists\Phi^{(k)}(\psi)\in L^1$ 使

$$\mathbb{E}[\psi(1+|x|^2-\Delta)^k f\circ\varphi] = \mathbb{E}[(f\circ\varphi)\Phi^{(k)}(\psi)] \tag{30.17}$$

对一切 $f\in C_b^{2k}(\mathbb{R}^m)$ 成立，且

$$c\equiv\sup\{\|\Phi^{(k)}(\psi)\|_{L^1}; \psi\in\mathbb{D}_{2k}^q, \|\psi\|_{q,2k}\le 1\}<\infty, \tag{30.18}$$

于是

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[\psi(f\circ\varphi)]| &= |\mathbb{E}[\psi(1+|x|^2-\Delta)^k(1+|x|^2-\Delta)^{-k}f\circ\varphi]| \\ &= |\mathbb{E}[((1+|x|^2-\Delta)^{-k}f\circ\varphi)\Phi^{(k)}(\psi)]| \\ &\le \|(1+|x|^2-\Delta)^{-k}f\|_{L^\infty}\|\Phi^{(k)}(\psi)\|_{L^1} \\ &= \|f\|_{-2k}\|\Phi^{(k)}(\psi)\|_{L^1},\end{aligned}$$

由于 $(\mathbb{D}_{2k}^q)^*=\mathbb{D}_{-2k}^p$, 故由 (30.18) 得

$$\|f\circ\varphi\|_{p,-2k}\le c\|f\|_{-2k},$$

定理得证.

定义 30.3 设 $T\in\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m), \varphi\in\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$ 且在 Malliavin 意义下非退化，则由定理 30.2 所确定的 $T\circ\varphi\in\mathbb{D}^{-\infty}$ 称为 Schwartz 广义函数 T 和 Wiener 泛函 φ 的**复合**. 或 T 在映象 $\varphi:\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 下的**拉回** (pullback).

下面利用定理 30.2 来研究 Wiener 泛函分布关于 $\mathbb{R}^m$ 中 Lebesgue 测度的绝对连续性以及其密度的光滑性质.

容易由 Fourier 分析证明, 若 $y \in \mathbb{R}^m$, 则 Dirac δ 函数 $\delta_y \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$, 且有以下结果:

引理 30.4 设 $y \in \mathbb{R}^m$, $k > m/2$, 则 $\delta_y \in \mathcal{T}_{-2k}$, 且映象: $\mathbb{R}^m \ni y \longmapsto \delta_y \in \mathcal{T}_{-2k}$ 为连续; 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 映象: $\mathbb{R}^m \ni y \longmapsto \delta_y \in \mathcal{T}_{-2k-2n}$ 为 $2n$ 次连续可微.

应用定理 30.2 及上述引理, 可得如下重要结论:

定理 30.5 设 $\varphi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$ 且在 Malliavin 意义下非退化, $\psi \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$. 则实值函数:

$$f(x) \equiv < \delta_x(\varphi), \psi > \tag{30.19}$$

无穷次可微. 特别, φ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的分布 $\mu \circ \varphi^{-1}$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续, 且具有 C^∞ 分布密度:

$$p_\varphi(x) = < \delta_x(\varphi), 1 >, \tag{30.20}$$

其中 $< \cdot, \cdot >$ 表示 $\mathbb{D}^{-\infty} \times \mathbb{D}^\infty$ 上的典则双线性型.

注 记 $\mathbb{E}[\delta_x(\varphi)\psi] \equiv < \delta_x(\varphi), \psi >$, 它是期望算子的推广. 特别, $p_\varphi(x) = \mathbb{E}[\delta_x(\varphi)]$ 就是 φ 的分布密度.

证 由定理 30.2 及引理 30.4, 若 $k > m/2$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 及 $p \in (1, \infty)$, 映象 $\mathbb{R}^m \ni x \longmapsto \delta_x(\varphi) \in \mathbb{D}^p_{-2k-2n}$ 为 $2n$ 次连续可微. 若 $\psi \in \mathbb{D}^q_{2k+2n}$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, 则 $f(x) = < \delta_x(\varphi), \psi > \in C^{2n}(\mathbb{R}^m)$, 因 n 为任意正整数, 故 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. 特别, $\psi \equiv 1 \in \mathbb{D}^\infty$, 对一切 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ 有

$$\begin{aligned}\int_{R^m} p_\varphi(x) g(x) dx &= \int_{R^m} g(x) < \delta_x(\varphi), 1 > dx \\ &= \left\langle \int_{R^m} g(x) \delta_x(\varphi) dx, 1 \right\rangle = < g \circ \varphi, 1 > \\ &= \mathbb{E}[g \circ \varphi],\end{aligned}$$

因而 $p_\varphi(x)$ 为 φ 之分布密度, 且 $p_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

关于有限次连续可微性质的定理，可参看 Ikeda-Watanabe[2]，我们只叙述如下：

定理 30.6 设 $n \in \mathbb{N}_0$, $k > m/2$, $\varphi \in \mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ 且满足：

$$[\det \mathbf{\Sigma}(w)]^{-1} \in L^{p_0}, \qquad p_0 > 4(k+n), \tag{30.21}$$

则对 $\forall p \in (1, p_0/4(k+n))$, $y \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\delta_y(\varphi) \in \mathbb{D}^p_{-2k},$$

且映象

$$\mathbb{R}^m \ni y \longmapsto \delta_y(\varphi) \in \mathbb{D}^p_{-2k-2n}$$

为 $2n$ 次连续可微. 对 $\forall \psi \in \mathbb{D}^q_{2k+2n}$(其中 $q^{-1}+p^{-1}=1$), 实值函数

$$f(y) \equiv < \delta_y(\varphi), \psi > \in C^{2n}(\mathbb{R}^m). \tag{30.22}$$

特别， φ 具有 C^{2n} 分布密度：

$$p_\varphi(y) = < \delta_y(\varphi), 1 > = \mathbb{E}[\delta_y(\varphi)].$$

§31. Hörmander 定理的概率方法证明

Wiener 泛函的最重要的例子是伊藤随机微分方程的解. 考虑方程：

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)\cdot dw(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{31.1}$$

其中 $b(x) = (b^i(x))_{1\le i\le m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \sigma(x) = (\sigma^i_j(x))_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^d$ 为 C^∞ 函数且一切偏导数有界. 由第四章的结果，此方程存在唯一强解 $X = X(x,t,w)$, 且

1° 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $X(x,\cdot,\cdot)$ 为扩散过程；

2° 对 a.a.$w[\mu]$, $X(\cdot,\cdot,w)$ 关于 (x,t) 连续；

3° 对 a.a.$w[\mu]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X(\cdot,t,w)$ 为 $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 的 C^∞ 微分同胚；

4° 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+, 1 \leq k \leq m, X^k(x,t,\cdot) \in L^{\infty-}$.

$\mathbb{R}^m$ 值 Wiener 泛函 $X(x,t,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的分布，即扩散过程 X 的转移概率：

$$P(t,x,\cdot) = \mu \circ X(x,t,\cdot)^{-1}. \tag{31.2}$$

若 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, 则

$$u_\varphi(t,x) \equiv \mathbb{E}[\varphi(X(x,t,\cdot))] \tag{31.3}$$

为以下 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = Lu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^m, \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{31.4}$$

的解，其中

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(\cdot)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^m b^i(\cdot)\partial_i \tag{31.5}$$

为扩散过程 X 的生成算子，矩阵 $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^*$.

由定理 30.5 可知，若能证明对 $\forall x \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}_+$ 有

1° $X(x,t,\cdot) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$ (31.6)

及

2° $[\det \Sigma(x,t,\cdot)]^{-1} \in L^{\infty-}$, (31.7)

其中

$$\Sigma(x,t,w) \equiv ((\nabla X^i(x,t,w), \nabla X^j(x,t,w))_H)_{1 \leq i,j \leq m} \tag{31.8}$$

为 X 的 Malliavin 协方差矩阵，则转移概率 (31.2) 存在 C^∞ 密度：

$$p(t,x,y) = \mathbb{E}[\delta_y(X(x,t,\cdot))], \tag{31.9}$$

亦即热方程 $\partial_t u = Lu$ 的基本解.

由偏微分方程理论可知，当矩阵 $a(x)$ 一致正定，即满足：

(H_0): $\qquad \exists \eta > 0$ 使 $a(\cdot) \geq \eta I$

时，此结果是成立的. 1967 年, Hörmander[1] 得到了关于亚椭圆 (hypoelliptic) 算子的一个相当弱的充分条件. 这就是著名的 Hörmander 定理. 为了叙述这个定理，需要先将算子 (31.5) 写成向量场形式. 为了记号简化起见，以后我们采用 Einstein 约定：当一个指标重复出现在上标及下标中时，均意味着对此指标求和. 令

$$A_k(\cdot) \equiv \sigma_k^i(\cdot)\partial_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, d), \tag{31.10}$$

$$A_0(\cdot) \equiv \left[b^i(\cdot) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \sigma_k^j(\cdot)\partial_j\sigma_k^i(\cdot)\right]\partial_i, \tag{31.11}$$

则 $A_0, A_1, \cdots, A_d$ 均为 $\mathbb{R}^m$ 上的 C^∞ 向量场. 注意

$$\begin{aligned} A_k^2 = A_k A_k &= \sigma_k^j \partial_j [\sigma_k^i \partial_i] \\ &= \sigma_k^i \sigma_k^j \partial_i \partial_j + \sigma_k^j [\partial_j \sigma_k^i] \partial_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, d), \end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=1}^{d} A_k^2 = a^{ij}\partial_i\partial_j + \sum_{k=1}^{d} \sigma_k^j [\partial_j \sigma_k^i] \partial_i,$$

算子 (31.5) 可写成如下形式：

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} A_k^2 + A_0. \tag{31.12}$$

再注意方程 (31.3) 等价于 Fisk-Stratonovich 方程：

$$dX_t = \widetilde{b}(X_t)dt + \sigma(X_t) \circ dw(t), \tag{31.13}$$

其中 $\widetilde{b}(x) = (\widetilde{b}^i(x))_{1 \leq i \leq m}$,

$$\widetilde{b}^i(x) \equiv b^i(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \sigma_k^j(x)\partial_j\sigma_k^i(x) \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{31.14}$$

(参看 (25.37)), 于是

$$A_0(\cdot)=\widetilde{b}^i(\cdot)\partial_i,$$

方程 (31.13) 可写成如下形式 (参看 (25.38) 式):

$$dX_t=A_0(X_t)dt+A_k(X_t)\circ dw^k(t). \tag{31.15}$$

此式应当理解为: 对 $\forall f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ 有

$$df(X_t)=(A_0f)(X_t)dt+(A_kf)(X_t)\circ dw^k(t). \tag{31.16}$$

定义 31.1 设 L 为具有 (31.12) 形式的二阶微分算子, 若对 $\mathbb{R}^m$ 中一切开集 U 及广义函数 $u\in\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$ 有

$$Lu|_U\in C^\infty(U)\Longrightarrow u|_U\in C^\infty(U), \tag{31.17}$$

则称 L 为 **亚椭圆算子**.

由经典的偏微分方程理论可知, 当 L 为椭圆算子 (即 $a(x)$ 正定) 时, 必为亚椭圆算子.

定理 31.2 (Hörmander) 若向量场 $A_0,A_1,\cdots,A_d$ 产生的 Lie 代数 Lie $\{A_k(x),0\leq k\leq d\}$ 在每点 $x\in\mathbb{R}^m$ 具有维数 m 时, 则 L 为亚椭圆算子.

为了说明亚椭圆算子未必椭圆, 先看一个例子:

例 5.1 (Kolmogorov 1934) 设 $m=2,d=1,A_0(x)=x_1\partial_2$, $A_1(x)=\partial_1$, 则

$$L=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{31.18}$$

此时

$$a(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad b(x)=\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix},$$

因而 L 不是椭圆算子. 但

$$\begin{aligned}[A_1,A_0]&=A_1A_0-A_0A_1=\partial_1(x_1\partial_2)-x_1\partial_2\partial_1\\&=x_1\partial_1\partial_2+\partial_2-x_1\partial_2\partial_1=\partial_2,\end{aligned}$$

因为 (∂_1,∂_2) 为 $\mathbb{R}^2$ 上切空间的基底，故对 $\forall x\in\mathbb{R}^2$, Lie $\{A_0(x), A_1(x)\}$ 具有维数 2, 由 Hörmander 定理， L 是亚椭圆算子.

考虑 L 扩散过程 $X_t=(X_t^1,X_t^2)$, 它是如下伊藤方程的解：

$$\begin{cases} X_t^1=x_1+w(t), \\ x_t^2=x_2+\int_0^t X_s^1 ds=x_2+x_1t+\int_0^t w(s)ds. \end{cases} \tag{31.19}$$

显然 X 是 Gauss 过程，且

$$m_t\equiv \mathbb{E}[X_t]=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_1t\end{pmatrix},$$

$$V_t\equiv \mathrm{Cov}(X_t)=\begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3\end{pmatrix}, \tag{31.20}$$

$$V_t^{-1}=\frac{2}{t^3}\begin{pmatrix} 2t^2 & -3t \\ -3t & 6\end{pmatrix}, \qquad \det V_t=t^4/12.$$

其转移概率密度为

$$\begin{aligned} &p(t,x,y) \\ &=(2\pi)^{-1}(\det V_t)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(y-m_t,V_t^{-1}(y-m_t))\Big\} \\ &=\frac{\sqrt{3}}{\pi t^2}\exp\Big\{-\frac{(x_1-y_1)^2}{2t}-\frac{6[y_2-x_2-(x_1+y_1)t/2]^2}{t^3}\Big\}, \end{aligned} \tag{31.21}$$

显然它是关于 y 的 C^∞ 函数，此即方程 $\partial_t u=Lu$ 的基本解.

为了证明 Hörmander 定理，先比较以下一系列的假设:

(H_1): Lie $\{A_k(x),\ 1\le k\le d\}$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 具有维数 m;

(H_2): Lie $\{A_k(x),\ [A_0(x),\ A_k(x)],\ 1\le k\le d\}$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 具有维数 m;

(H_3): Lie $\{A_k(x), 0\le k\le d\}$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 具有维数 m.

注意在假设 (H_2) 中，向量场 A_0 只在 Lie 括号中出现. 显然我们有： $(H_0)\Longrightarrow(H_1)\Longrightarrow(H_2)\Longrightarrow(H_3)$. 而 Hörmander 定理断言： $(H_3)\Longrightarrow L$ 为亚椭圆算子. 我们采取的证明途径是：先证明

在 (H_2) 假定下，(31.6) 及 (31.7) 成立，因而转移概率 (31.2) 有 C^∞ 密度且 L 为亚椭圆；然后证明在 (H_3) 假定下 L 为亚椭圆算子.

首先，要计算 X 的 Malliavin 协方差矩阵.

定理 31.3 设方程 (31.1) 的系数 b 及 σ 为 C^∞ 函数，且一切偏导数有界，则其唯一解 $X = X(x,t,\cdot) \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)(\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall t > 0)$，其 Malliavin 协方差矩阵为

$$\Sigma_t = \Sigma(x,t,w) = J_t\Big[\int_0^t J_s^{-1}a(X_s)(J_s^{-1})^* ds\Big]J_t^*, \qquad (31.22)$$

其中 $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^*, J_t = J(x,t,w) = (\partial_j X^i(x,t,w))_{1\le i,j\le m}$ 为 X(关于初值 x 微分) 的 Jacobi 矩阵.

证 在定理 32.11 中已经证明，J_t 满足以下随机微分方程：

$$\begin{cases} dJ_t = A_0^{(1)}(X_t)J_t dt + A_k^{(1)}(X_t)J_t \circ dw^k(t), \\ J_0 = I, \end{cases} \qquad (31.23)$$

其中 $A_k^{(1)} \equiv (\partial_j \sigma_k^i)_{1\le i,j\le m}(k = 1,\cdots,d), A_0^{(1)} \equiv (\partial_j \widetilde{b}^i)_{1\le i,j\le m}$，而 J_t 之逆矩阵满足另一随机微分方程：

$$\begin{cases} dJ_t^{-1} = -J_t^{-1}A_0^{(1)}(X_t)dt - J_t^{-1}A_k^{(1)}(X_t) \circ dw^k(t), \\ J_0^{-1} = I, \end{cases} \qquad (31.24)$$

因而作为 $\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^m$ 值 Wiener 泛函，$J_t, J_t^{-1} \in L^{\infty-}$.

对 $h = (h^1,\cdots,h^d) \in H, i = 1,2,\cdots,m$，按定义有

$$(\nabla X^i(x,t,w), h)_H = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}[X^i(x,t,w+\varepsilon h)]_{\varepsilon=0},$$

而 $X^\varepsilon(x,t,w) \equiv X(x,t,w+\varepsilon h)$ 满足方程：

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon &= A_0(X_t^\varepsilon)dt + A_k(X_t^\varepsilon) \circ d(w^k(t) + \varepsilon h^k(t)) \\ &= \widetilde{b}(X_t^\varepsilon)dt + \sigma(X_t^\varepsilon) \circ dw(t) + \varepsilon\sigma(X_t^\varepsilon)\dot{h}(t)dt, \\ X_0^\varepsilon &= x. \end{cases} \qquad (31.25)$$

利用微分同胚性质及伊藤公式，不难证明 (参看习题 4.8)

$$X^{\varepsilon}(x,t,w)=X(Y^{\varepsilon}(x,t,w),t,w), \tag{31.26}$$

其中 Y_t^{ε} 为以下微分方程的解：

$$\begin{cases} dY_t^{\varepsilon}=\varepsilon J^{-1}(Y_t^{\varepsilon},t)\sigma(X(Y_t^{\varepsilon},t))\dot{h}(t)dt, \\ Y_0^{\varepsilon}=x. \end{cases} \tag{31.27}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[Y_t^{\varepsilon}]_{\varepsilon=0}=\int_0^t J^{-1}(x,s)\sigma(X_s)\dot{h}(s)ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[X_t^{\varepsilon}]_{\varepsilon=0}=J(x,t)\int_0^t J^{-1}(x,s)\sigma(X_s)\dot{h}(s)ds, \tag{31.28}$$

因而对 $i=1,\cdots,m$ 有

$$(\nabla X^i(x,t,w),h)_H=\int_0^t [J_tJ_s^{-1}\sigma(X_s)]_j^i\dot{h}^j(s)ds, \tag{31.29}$$

其中 $[\cdot]_j^i$ 表示此矩阵第 i 行第 j 列元素. 类似地, 对 $h_1,h_2,\cdots,h_k\in H$, 可以计算：

$$(\nabla^k X^i(x,t,w),h_1\otimes h_2\otimes\cdots\otimes h_k)_{H^{k\otimes}}\qquad (i=1,\cdots,m),$$

并容易看出 $\|\nabla^k X_t^i\|_{H.S.}\in L^{\infty-}(\forall k\in\mathbb{N})$, 因此有 $X_t^i\in\mathbb{D}^{\infty}(i=1,\cdots,m)$. 令

$$\dot{K}_t(s)=\begin{cases} J_tJ_s^{-1}\sigma(X_s), & 若\ s\le t, \\ 0, & 若\ s>t, \end{cases}$$

$$K_t(s)=\int_0^s \dot{K}_t(u)du,$$

并记此 $m\times d$ 矩阵之第 i 行为 $K_t^i(s)$. 显然 $K_t^i(s)\in H$, 且 (31.29) 可写成

$$(\nabla X_t^i,\ h)_H=(K_t^i,\ h)_H,\qquad \forall h\in H,$$

因而 Malliavin 协方差为

$$
\begin{aligned}
\Sigma_t^{ij} &\equiv (\nabla X_t^i,\ \nabla X_t^j)_H = (K_t^i,\ K_t^j)_H \\
&= \int_0^\infty (\dot{K}_t^i(s),\ \dot{K}_t^j(s))ds \\
&= \sum_{k=1}^d \int_0^t [J_t J_s^{-1}\sigma(X_s)]_k^i [J_t J_s^{-1}\sigma(X_s)]_k^j ds \\
&= \int_0^t [J_t J_s^{-1}\sigma(X_s)\sigma(X_s)^*(J_s^{-1})^* J_t^*]_j^i ds \\
&\qquad\qquad\qquad (i, j = 1, \cdots, m),
\end{aligned}
$$

故

$$
\Sigma_t = J_t\Big[\int_0^t J_s^{-1}a(X_s)(J_s^{-1})^* ds\Big] J_t^*.
$$

现在可以计算例 5.1 中的 Malliavin 协方差矩阵. 由 (31.19) 可知

$$
J_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad J_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},
$$

由 (31.22) 式计算得

$$
\begin{aligned}
\Sigma_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \left\{ \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ds \right\} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

恰好是 X_t 的协方差矩阵 (参看 (31.20) 式).

现在关键的一步是要证明在 (H_2) 假定下此 Malliavin 协方差矩阵非退化.

记 $\widetilde{\Sigma}_t \equiv \int_0^t J_s^{-1}a(X_s)(J_s^{-1})^* ds$. 于是 $\Sigma_t = J_t\widetilde{\Sigma}_t J_t^*$, 而 $\det \Sigma_t = (\det J_t)^2(\det \widetilde{\Sigma}_t)$. 但我们已知 $(\det J_t)^{-1} \in L^{\infty-}$, 所以, 为证 $(\det \Sigma_t)^{-1} \in L^{\infty-}$, 只须证明

$$
\left[\det \widetilde{\Sigma}_t\right]^{-1} \in L^{\infty-}.
$$

在以下讨论中，若 $V \in C^\infty(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m), V(x) = (v^i(x))_{1\le i\le m}$，则同时以 V 表示 C^∞ 向量场：$V(\cdot) = \sum_{i=1}^m v^i(\cdot)\partial_i$.

由 Fisk-Stratonovich 微分规则得

$$\begin{aligned}d[J_t^{-1}V(X_t)] &= (dJ_t^{-1})\circ V(X_t) + J_t^{-1}\circ dV(X_t)\\ &= -J_t^{-1}A_0^{(1)}(X_t)V(X_t)dt - J_t^{-1}A_k^{(1)}(X_t)V(X_t)\circ dw^k(t)\\ &\quad + J_t^{-1}(A_0V)(X_t)dt + J_t^{-1}(A_kV)(X_t)\circ dw^k(t),\end{aligned}$$

由于 $[A_0^{(1)}(x)V(x)]^i = v^j(x)\partial_j\tilde{b}^i(x) = (V\tilde{b}^i)(x)$，但 $A_0(\cdot) = \tilde{b}^i(\cdot)\partial_i$，故用向量场记号有

$$A_0^{(1)}(x)V(x) = (VA_0)(x).$$

同样地

$$A_k^{(1)}(x)V(x) = (VA_k)(x) \qquad (k=1,\cdots,d).$$

于是

$$\begin{aligned}d[J_t^{-1}V(X_t)] &= J_t^{-1}(A_0V - VA_0)(X_t)dt\\ &\quad + J_t^{-1}(A_kV - VA_k)(X_t)\circ dw^k(t)\\ &= J_t^{-1}[A_0, V](X_t)dt + J_t^{-1}[A_k, V](X_t)\circ dw^k(t).\end{aligned} \tag{31.30}$$

将方程 (31.15) 和 (31.23) 联合起来，其解

$$R_t \equiv (X_t, J_t)$$

为取值于 $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^m)$ 的随机过程，初值为

$$R_0 = (x, I).$$

对向量场 V，可定义函数 $f_V : \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \bigotimes \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 如下：

$$f_V(r) \equiv J^{-1}V(x) \text{ 若 } r = (x, J) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m). \tag{31.31}$$

这样，方程 (31.30) 可以写成

$$\begin{cases} df_V(\boldsymbol{R}_t) = f_{[A_0,V]}(\boldsymbol{R}_t)dt + f_{[A_k,V]}(\boldsymbol{R}_t) \circ dw^k(t), \\ f_V(\boldsymbol{R}_0) = V(x). \end{cases} \tag{31.32}$$

为了将它转换成伊藤方程，引进以下记号是方便的：

$$\{A_k, V\} \equiv [A_k, V] \qquad (k = 1, \cdots, d),$$

$$\{A_0, V\} \equiv [A_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}[A_k, [A_k, V]].$$

在方程 (31.32) 中以 $[A_j, V]$ 代替 V, 得

$$\begin{aligned} &df_{[A_j,V]}(\boldsymbol{R}_t) = f_{[A_0,[A_j,V]]}(\boldsymbol{R}_t)dt \\ &+ f_{[A_k,[A_j,V]]}(\boldsymbol{R}_t) \circ dw^k(t) \qquad (j = 1, \cdots, d), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &f_{[A_k,V]}(\boldsymbol{R}_t) \circ dw^k(t) \\ &= f_{[A_k,V]}(\boldsymbol{R}_t) \cdot dw^k(t) + \frac{1}{2}df_{[A_k,V]}(\boldsymbol{R}_t) \cdot dw^k(t) \\ &= f_{[A_k,V]}(\boldsymbol{R}_t) \cdot dw^k(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} f_{[A_k,[A_k,V]]}(\boldsymbol{R}_t)dt, \end{aligned}$$

故 (31.32) 的伊藤形式为

$$\begin{cases} df_V(\boldsymbol{R}_t) = f_{\{A_0,V\}}(\boldsymbol{R}_t)dt + f_{\{A_k,V\}}(\boldsymbol{R}_t) \cdot dw^k(t), \\ f_V(\boldsymbol{R}_0) = V(x). \end{cases} \tag{31.32'}$$

现在我们对 $n \in \mathbb{N}_0$, 定义向量场的集合 $\widehat{\mathcal{V}}_n$ 及 $\mathcal{V}_n$ 如下：

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{V}}_0 \equiv \{A_1, A_2, \cdots, A_d\}, \\ &\widehat{\mathcal{V}}_n \equiv \{\{A_k, V\},\ V \in \widehat{\mathcal{V}}_{n-1}, k = 0, 1, \cdots, d\}, \qquad n \geq 1, \\ &\mathcal{V}_n \equiv \widehat{\mathcal{V}}_0 \cup \widehat{\mathcal{V}}_1 \cup \cdots \cup \widehat{\mathcal{V}}_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

显然，(H_2) 等价于以下条件：

(H_2')：$\forall x \in \mathbb{R}^m, \exists N \in \mathbb{N}_0$ 及 $V_1, \cdots, V_m \in \mathcal{V}_N$，使 $V_1(x), \cdots, V_m(x)$ 线性独立.

换句话说，(H_2) 等价于以下条件：

(H_2'')：$\forall x \in \mathbb{R}^m, \exists N \in \mathbb{N}_0$ 使

$$\inf_{l \in S^{m-1}} \sum_{V \in \mathcal{V}_N} (l, V(x))^2 > 0, \tag{31.33}$$

其中 $S^{m-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^m; |x| = 1\}$，即 m 维单位球面.

实际上，在 $\mathcal{V}_N$ 中只含有限个向量场，将它们排成一个矩阵，若其秩小于 m，则各行线性相关，因而存在 $l \in S^{m-1}$ 使 (31.33) 左边为 0; 反之，若其秩为 m，则各行线性独立，因而对任意 $l \in S^{m-1}$，(31.33) 左边均大于 0.

因此，问题归结于在 (H_2'') 条件下证明

$$[\det \widetilde{\Sigma}_t]^{-1} \in L^{\infty-}. \tag{31.34}$$

我们这里采用 Norris[1] 所提出的简单证明. 先证明一个引理：

引理 31.4 设 X 为一维伊藤过程：

$$X_t = x + \int_0^t Y_s^0 ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t Y_s^k dW_s^k, \qquad t \geq 0, \tag{31.35}$$

其中 Y^0 仍为一维伊藤过程：

$$Y_t^0 = y + \int_0^t Z_s^0 ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t Z_s^k dW_s^k, \qquad t \geq 0, \tag{31.36}$$

式中 $x, y \in \mathbb{R}$，$Y = (Y^1, \cdots, Y^d)$ 及 $Z = (Z^1, \cdots, Z^d)$ 为 d 维循序过程，且 $\exists K > 0$ 及有界停时 $\tau > 0$ 使

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \{|Y_t^0| + |Z_t^0| + |Y_t| + |Z_t|\} \leq K,$$

则 $\forall q>8, \nu<(q-8)/9$, 当 ε 充分小时，$\exists c>0$ 使

$$P\left\{\int_0^\tau X_t^2 dt<\varepsilon^q, \int_0^\tau (|Y_t^0|^2+|Y_t|^2)dt \geq \varepsilon\right\} \leq c\exp\{-\varepsilon^{-\nu}\}. \quad (31.37)$$

证 记 $A_t \equiv \int_0^t Y_s^0 ds$, $M_t \equiv \int_0^t Y_s dW_s$, $Q_t \equiv \int_0^t A_s Z_s dW_s$, $N_t \equiv \int_0^t X_s Y_s dW_s$,

$$S_1 \equiv \{[N]_\tau<\varepsilon_1, \sup_{t\leq\tau}|N_t| \geq \delta_1\},$$

$$S_2 \equiv \{[M]_\tau<\varepsilon_2, \sup_{t\leq\tau}|M_t| \geq \delta_2\},$$

$$S_3 \equiv \{[Q]_\tau<\varepsilon_3, \sup_{t\leq\tau}|Q_t| \geq \delta_3\}.$$

式中 $[\cdot]$ 表示连续局部鞅的平方变差过程. 由指数不等式 (参看习题 2.13) 可知

$$P(S_i) \leq 2\exp\{-\delta_i^2/2\varepsilon_i\}, \qquad i=1,2,3.$$

选 $q_1=(q-\nu)/2, q_2=(q_1/2-\nu)/2, q_3=(2q_2-\nu)/2$, 则 $q>q_1>q_2>q_3>1$. 选 $\delta_i=\varepsilon^{q_i}(i=1,2,3), \varepsilon_1=c_1\varepsilon^q, \varepsilon_2=c_2\varepsilon^{q_1/2}, \varepsilon_3=c_3\varepsilon^{2q_2}$($c_1,c_2,c_3$ 为待定常数), 则

$$\delta_i^2/\varepsilon_i \sim \varepsilon^{-\nu}, \qquad i=1,2,3.$$

为证引理，只要证明当 ε 充分小时可选适当的常数 c_1,c_2,c_3 使 (31.37) 式左边的事件含于 $\bigcup_{i=1}^3 S_i$. 为此只要证明：当 ε 充分小时，若 $\omega \overline{\in} \bigcup_{i=1}^3 S_i$, 且 $\int_0^\tau X_t^2 dt<\varepsilon^q$, 则必有 $\int_0^\tau (|Y_t^0|^2+|Y_t|^2)dt<\varepsilon$. 设 $\tau \leq T$, 下面分三步来证明：

1° 设 $c_1=K^2$, 则

$$[N]_\tau=\int_0^\tau X_t^2|Y_t|^2 dt<K^2\varepsilon^q=\varepsilon_1.$$

由 $\omega \overline{\in} S_1$, 必有 $\sup_{t\leq\tau}|N_t|<\delta_1=\varepsilon^{q_1}$. 但

$$\sup_{t\leq\tau}\left|\int_0^t X_s Y_s^0 ds\right| \leq \left(T\int_0^\tau (X_s Y_s^0)^2 ds\right)^{1/2}<KT^{1/2}\varepsilon^{q/2},$$

故

$$\sup_{t\le\tau}\left|\int_0^t X_s dX_s\right| < \varepsilon^{q_1} + KT^{1/2}\varepsilon^{q/2}.$$

由伊藤公式

$$[M]_t = X_t^2 - x^2 - 2\int_0^t X_s dX_s,$$

可知

$$\int_0^\tau [M]_t dt < \varepsilon^q + 2T(\varepsilon^{q_1} + KT^{1/2}\varepsilon^{q/2}).$$

因 $q_1 < q/2$, 当 ε 充分小时, $\exists c_0 > 0$ 使上式小于 $c_0\varepsilon^{q_1}$. 注意到 $[M]$ 为增过程, 对 $\delta > 0$ 有

$$\delta[M]_{\tau-\delta} < \int_{\tau-\delta}^\tau [M]_t dt < c_0\varepsilon^{q_1},$$

$$[M]_\tau < [M]_{\tau-\delta} + K^2\delta,$$

选 $\delta = \varepsilon^{q_1/2}$, 则 $\exists c_2 > 0$ 使 $[M]_\tau < c_2\varepsilon^{q_1/2}$.

2° 设 $\varepsilon_2 = c_2\varepsilon^{q_1/2}$, 由 $\omega\overline{\in}S_2$, 必有 $\sup_{t\le\tau}|M_t| < \delta_2 = \varepsilon^{q_2}$. 因 $\int_0^\tau X_t^2 dt < \varepsilon^q$, 故

$$\lambda^1\{0 \le t \le \tau; |X_t| \ge \varepsilon^{q/3}\} \le \varepsilon^{q/3},$$

式中 λ^1 为一维 Lebesgue 测度. 因 $X_t = x + A_t + M_t$, 故

$$\lambda^1\{0 \le t \le \tau; |x + A_t| \ge \varepsilon^{q/3} + \varepsilon^{q_2}\} \le \varepsilon^{q/3},$$

从而 $\forall t \in [0,\tau]$, $\exists s \in [0,\tau]$, $|s-t| \le \varepsilon^{q/3}$, 使 $|x + A_s| < \varepsilon^{q/3} + \varepsilon^{q_2}$, 于是

$$|x + A_t| \le |x + A_s| + \left|\int_s^t Y_r^0 dr\right| < (1+K)\varepsilon^{q/3} + \varepsilon^{q_2}.$$

特别有 $|x| < (1+K)\varepsilon^{q/3} + \varepsilon^{q_2}$, 所以 $\forall t \in [0,\tau]$, $|A_t| < 2((1+K)\varepsilon^{q/3} + \varepsilon^{q_2})$, 因 $q_2 < q/3$, 当 ε 充分小时有 $|A_t| < 3\varepsilon^{q_2}$.

3° 由伊藤公式

$$\int_0^\tau (Y_t^0)^2 dt = \int_0^\tau Y_t^0 dA_t$$
$$= Y_\tau^0 A_\tau - \int_0^\tau A_t(Z_t^0 dt + Z_t \cdot dW_t), \qquad (31.38)$$

注意到 $|Y_\tau^0 A_\tau| < 3K\varepsilon^{q_2}$, $\left|\int_0^\tau A_t Z_t^0 dt\right| < 3KT\varepsilon^{q_2}$ 以及 $[Q]_\tau = \int_0^\tau A_t^2 |Z_t|^2 dt < 9K^2T\varepsilon^{2q_2}$, 令 $c_3 = 9K^2T, \varepsilon_3 = c_3\varepsilon^{2q_2}$, 因 $\omega\overline{\in}S_3$, 必有 $\sup_{t\leq\tau}|Q_t| < \delta_3 = \varepsilon^{q_3}$. 特别, $|Q_\tau| < \varepsilon^{q_3}$, 由 (31.38) 式即知

$$\int_0^\tau (Y_t^0)^2 dt < 3K(1+T)\varepsilon^{q_2} + \varepsilon^{q_3},$$

因 $q_3 < q_2$, 当 ε 充分小时上式小于 $2\varepsilon^{q_3}$, 于是

$$\int_0^\tau (|Y_t^0|^2 + |Y_t|^2) dt < 2\varepsilon^{q_3} + c_2\varepsilon^{q_1/2} < \varepsilon.$$

现在回到 Wiener 空间 $(\mathcal{W}, H, \mu)$, 来证明在 (H_2) 假定下方程 (31.1) 的解的 Malliavin 协方差矩阵 (31.22) 非退化.

定理 31.5 在 (H_2) 假定下, 方程 (31.1) 的解的 Malliavin 协方差矩阵 (31.22) 满足:

$$[\det \mathbf{\Sigma}(x,t,\cdot)]^{-1} \in L^{\infty-} \qquad (t>0, x\in \mathbb{R}^m).$$

证 只须证明在 (H_2'') 条件下 (31.34) 成立.

设 X 及 J^{-1} 分别为方程 (31.1) 及 (31.24) 的解, 由 BDG 不等式 (13.22) 可获得解的估计: $\forall q>1$ 有

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq\varepsilon} |X_s - x|^q \vee \|J_s^{-1} - I\|^q\Big] = O(\varepsilon^{q/2}).$$

固定 $t>0$ 及 $c>0$, 令

$$\tau_c \equiv \inf\{s\geq 0; |X_s - x| \vee \|J_s^{-1} - I\| \geq c^{-1}\} \wedge t,$$

则 τ_c 为停时，且对 $\varepsilon\in(0,t)$

$$\{\tau_c\le\varepsilon\}=\{\sup_{s\le\varepsilon}|X_s-x|\vee\|J_s^{-1}-I\|\ge c^{-1}\}.$$

$\forall p>1$, 取 $q>2p,\varepsilon=n^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned}\mu(\tau_c^{-1}\ge n)&=\mu(\tau_c\le n^{-1})\\&\le c^{-q}\boldsymbol{E}[\sup_{s\le n^{-1}}|X_s-x|^q\vee\|J_s^{-1}-I\|^q]\\&=O(n^{-q/2}).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}\mu(\tau_c^{-1}\ge n)<\infty,$$

即 $\tau_c^{-1}\in L^p$. 因 p 是任意的，故 $\tau_c^{-1}\in L^{\infty-}$.

由条件 (H_2'') 及方程 (31.32′) 解对初值的连续依赖性可知，$\forall l_0\in S\equiv S^{m-1},\exists N\in\mathbb{N}_0,V\in\mathcal{V}_N$, 以及 l_0 之某邻域 S_0, 对足够大的 c 及足够小的 $\delta>0$ 有

$$\inf_{l\in S_0}\inf_{s\le\tau_c}(l,f_V(R_s))^2\ge\delta. \tag{31.39}$$

简记 τ_c 为 τ, 从而 $\forall p>1$ 有

$$\sup_{l\in S_0}\mu\Big\{\int_0^\tau(l,f_V(R_s))^2ds<\varepsilon\Big\}\le\mu\{\delta\tau<\varepsilon\}=o(\varepsilon^p). \tag{31.40}$$

设 $V=\{A_{k_j},\{A_{k_{j-1}},\cdots\{A_{k_1},A_{k_0}\}\cdots\}\}$, 其中 $0\le j\le N$, $1\le k_0\le d$, $0\le k_1,\cdots,k_j\le d$. 令 $V_0\equiv A_{k_0},V_1\equiv\{A_{k_1},V_0\},\cdots,V_j\equiv\{A_{k_j},V_{j-1}\}=V$, 我们用归纳法证明：对 $i=j,j-1,\cdots,0$, $\forall p>1$ 有

$$\sup_{l\in S_0}\mu\Big\{\int_0^\tau(l,f_{V_i}(R_s))^2ds<\varepsilon\Big\}=o(\varepsilon^p). \tag{31.41}$$

当 $i=j$ 时此即 (31.40) 式. 设 (31.41) 式对 i 成立, 要证它对 $i-1$ 也成立. 注意对 $l\in S$ 及 C^∞ 向量场 V, 我们有

$$\begin{cases} d(l,f_V(\boldsymbol{R}_t))=(l,f_{\{A_0,V\}}(\boldsymbol{R}_t))dt+(l,f_{\{A_k,V\}}(\boldsymbol{R}_t))\cdot dw^k(t), \\ (l,f_V(\boldsymbol{R}_0))=(l,V(x)). \end{cases} \tag{31.42}$$

由引理 31.4 对 $q>8$, 当 ε 充分小时, $\forall p>1$ 有

$$\mu\Big\{\int_0^\tau (l,f_{V_{i-1}}(\boldsymbol{R}_s))^2ds<\varepsilon^q, \int_0^\tau\sum_{k=0}^d (l,f_{\{A_k,V_{i-1}\}}(\boldsymbol{R}_s))^2ds\geq\varepsilon\Big\}$$
$$=o(\varepsilon^p).$$

由归纳假设可知

$$\sup_{l\in S_0}\mu\Big\{\int_0^\tau\sum_{k=0}^d (l,f_{\{A_k,V_{i-1}\}}(\boldsymbol{R}_s))^2ds<\varepsilon\Big\}=o(\varepsilon^p),$$

从而

$$\sup_{l\in S_0}\mu\Big\{\int_0^\tau (l,f_{V_{i-1}}(\boldsymbol{R}_s))^2ds<\varepsilon^q\Big\}=o(\varepsilon^p),$$

得证 (31.41) 式. 特别, 当 $i=0$ 时即有 $k\in[1,d]$ 使

$$\sup_{l\in S_0}\mu\Big\{\int_0^\tau (l,f_{A_k}(\boldsymbol{R}_s))^2ds<\varepsilon\Big\}=o(\varepsilon^p).$$

因 S 为紧集, 可选有限个邻域覆盖, 故

$$\mu\Big\{\inf_{l\in S}\int_0^\tau\sum_{k=1}^d (l,f_{A_k}(\boldsymbol{R}_s))^2ds<\varepsilon\Big\}=o(\varepsilon^p),$$
$$1<p<\infty. \tag{31.43}$$

因 $\tau\leq t$, 上式中 τ 改为 t 时仍成立, 但

$$\sum_{k=1}^d (l,f_{A_k}(\boldsymbol{R}_s))^2=\sum_{k=1}^d (l,J_s^{-1}A_k(X_s))^2$$
$$=|l^*J_s^{-1}\sigma(X_s)|^2,$$

故

$$\inf_{l\in S}\int_0^t\sum_{k=1}^d(l,f_{A_k}(R_s))^2ds=\inf_{l\in S}(l,\widetilde{\Sigma}_t l)$$

恰好是 $\widetilde{\Sigma}_t$ 的最小特征根 $\lambda_{\min}$. 因此 $\lambda_{\min}^{-1}\in L^{\infty-}$, 由此推出 $[\det\widetilde{\Sigma}_t]^{-1}\in L^{\infty-}$.

现在回到 Hörmander 定理的证明. 我们已经证明了当 (H_2) 满足时, (31.6) 及 (31.7) 成立, 因而由定理 30.5, 热方程 $\partial_t u=Lu$ 具有光滑的基本解, 由此可证 (参看 Kusuoka-Stroock[2]) L 为亚椭圆算子. 剩下要证明在 (H_3) 条件下 L 仍为亚椭圆算子.

设 Lie $\{A_k(x),\ 0\le k\le d\}$ 在 $\forall x\in\mathbb{R}^m$ 具有维数 m. 考虑 $(x,\xi)=(x_1,\cdots,x_n,\xi)\in\mathbb{R}^{m+1}$ 及 $\mathbb{R}^{m+1}$ 上的向量场:

$$\begin{aligned}
&\widehat{A}_0(x,\xi)\equiv(2+\cos\xi)A_0(x),\\
&\widehat{A}_k(x,\xi)\equiv(2+\cos\xi)^{\frac12}A_k(x)\qquad(1\le k\le d),\\
&\widehat{A}_{d+1}(x,\xi)\equiv\partial_\xi,
\end{aligned}$$

则 Lie$\{\widehat{A}_k,[\widehat{A}_0,\widehat{A}_k],1\le k\le d+1\}$ 在 $\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{m+1}$ 具有维数 $m+1$. 令

$$\widehat{L}\equiv\frac12\sum_{k=1}^{d+1}\widehat{A}_k^2+\widehat{A}_0=(2+\cos\xi)L+\frac12\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}.$$

由刚才所证, $\widehat{L}$ 在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中为亚椭圆算子, 由此容易看出, L 在 $\mathbb{R}^m$ 中为亚椭圆算子. 至此, Hörmander 定理全部证毕.

现在要问: Hörmander 条件 (H_3) 是否必要? 我们知道, 当系数为实解析函数时, 它是必要的, 但若系数不是解析函数, 已有例子表明 (参看 Kusuoka-Stroock[2]) 它不是必要条件, 此外, 借助于概率方法, Kusuoka-Stroock[2] 对 Hörmander 条件作了如下改进:

定理 31.6 (Kusuoka-Stroock[2] 定理 8.13) 设方程 (31.15) 中 $\{A_k,0\le k\le d\}\subset C_b^\infty(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m)$, 若存在非降函数 $\rho:(0,1]\longrightarrow(0,\infty)$, 满足:

$$\lim_{t\downarrow0}\log(\rho(t)^{-1})=0,\tag{31.44}$$

且对 $\forall p \in [1,\infty)$, $\exists c_p > 0$ 使

$$\|(\det \Sigma(x,t))^{-1}\|_p \le c_p \rho(t)^{-1} \tag{31.45}$$

对 $\forall t \in (0,1]$ 及 $x \in R^m$ 成立，则 $L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} A_k^2 + A_0$ 为亚椭圆算子.

注意， Hörmander 条件相当于

$$\|(\det \Sigma(x,t))^{-1}\|_p \le c_p t^{-\alpha}, \qquad \alpha > 0 \tag{31.46}$$

称为次椭圆 (subelliptic), 即方程 $\partial_t u = Lu$ 的基本解当 $t \downarrow 0$ 时以多项式的速度增至无穷. 如果其增长速度超过多项式，它就不再是次椭圆，但仍可能为亚椭圆算子.

Malliavin 随机分析开辟了一个用概率方法研究分析问题的广阔领域. 除了热方程基本解的光滑性质外，还可以用来研究它的渐近估计，包括当 $t \downarrow 0$ 或 $t \uparrow \infty$ 时的渐近性质，前者可参看 Bismut[3] 及 Watanabe[2], 他们还先后用概率方法证明了 Atiyah-Singer 的指标定理 (Bismu[4] 及 Ikeda-Watanabe[3]), 特别是 Watanabe 建立的广义 Wiener 泛函的渐进展开公式，成为研究这种渐近估计的有力工具.

研究电磁场中的热方程，涉及所谓随机振荡积分，这方面的研究可参看 Malliavin[5,7] 和 Gaveau-Vauthier[1], Ikeda-Shigekawa-Taniguchi[1] 用所谓 Malliavin 偏微分运算研究了其长时间 (即当 $t \uparrow \infty$ 时) 的渐近估计. 这种偏微分运算在滤波理论中有重要应用 (参看 Michel[1], Kusuoka-Stroock[4]).

几乎和 Malliavin 同时， Hida[2] 发展了一种白噪声泛函分析，并应用它研究了 Feynman 积分 (参看 Streit-Hida[1]), 由于它在量子场论等方面的成功应用 (例如参看 Potthoff- Streit[1], 黄志远、骆顺龙 [1]) 已越来越引起物理学界的重视.

Skorohod[3] 定义了对 Brown 运动的非适应随机积分， Gaveau-Trauber[1] 证明了 Skorohod 积分和散度算子 δ 的等价性，由此开

始了非适应性随机分析的系统研究 (例如参看 Pardoux[1] 及其中所列文献).

此外, 关于双参数 Brown 运动 (Brownian sheet) 的泛函分析可参看 Kusuoka[1], 取值于微分流形的 Wiener 泛函分析可参看 Taniguchi[1]. Malliavin 随机分析还可应用于不连续鞅 (例如 Poisson 鞅) 的泛函, 例如参看 Bismut[2], Bichteler-Jacod[1] 和吴黎明 [1,2].

还须提及的是, Malliavin[4] 利用 Sobolev 范数引进了 Wiener 空间的容度和疏集 (一种比 μ 零集更细的集) 的概念, 并证明了 Wiener 空间上的隐函数定理. Brown 运动轨道或轨道泛函的某些性质已被证明不仅 μ- 几乎处处成立, 且可除开一个疏集之外成立, 这就是所谓拟必然分析 (例如参看 Fukushima[1], Takeda[1], 任佳刚 [1–4], 黄志远、任佳刚 [1]).

附录 A　单调类定理

设 Ω 为一集合，$\mathcal{G}$ 为 Ω 的非空子集系．若

$$E, F \in \mathcal{G} \Longrightarrow E \cap F \in \mathcal{G},$$

则称 $\mathcal{G}$ 为 **π系**．若

$1°$　$\Omega \in \mathcal{G}$;

$2°$　$E, F \in \mathcal{G}, E \subset F \Longrightarrow F \setminus E \in \mathcal{G}$;

$3°$　$\{E_n\} \subset \mathcal{G}, E_n \uparrow E \Longrightarrow E \in \mathcal{G}$,

则称 $\mathcal{G}$ 为 **λ系**．若

$$\{E_n\} \subset \mathcal{G}, E_n \uparrow E \text{ 或 } E_n \downarrow E \Longrightarrow E \in \mathcal{G},$$

则称 $\mathcal{G}$ 为 **单调类**．显然，若 $\mathcal{G}$ 同时为 π 系和 λ 系，或同时为单调类和代数，则 $\mathcal{G}$ 为 σ- 代数．我们以 $\lambda(\mathcal{G})$ 、 $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ 及 $\sigma(\mathcal{G})$ 分别表示包含子集系 $\mathcal{G}$ 的最小 λ 系、单调类及 σ- 代数，则有

定理 A.1　若 $\mathcal{G}$ 为 π 系，则 $\lambda(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$; 若 $\mathcal{G}$ 为代数，则 $\mathcal{M}(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$.

证　显然 $\lambda(\mathcal{G}) \subset \sigma(\mathcal{G})$. 为证相反包含关系，只须证明 $\lambda(\mathcal{G})$ 为 σ- 代数，为此又只须证明 $\lambda(\mathcal{G})$ 为 π 系．令

$$\mathcal{F}_1 \equiv \{F \in \lambda(\mathcal{G});\ \forall E \in \mathcal{G},\ E \cap F \in \lambda(\mathcal{G})\},$$

容易验证，$\mathcal{F}_1$ 是含 $\mathcal{G}$ 的 λ 系，故 $\mathcal{F}_1 = \lambda(\mathcal{G})$, 即对 $\forall F \in \lambda(\mathcal{G}), \forall E \in \mathcal{G}$, 有 $E \bigcap F \in \lambda(\mathcal{G})$. 再令

$$\mathcal{F}_2 \equiv \{E \in \lambda(\mathcal{G});\ \forall F \in \lambda(\mathcal{G}),\ E \cap F \in \lambda(\mathcal{G})\},$$

则 $\mathcal{F}_2$ 也是含 $\mathcal{G}$ 的 λ 系，故 $\mathcal{F}_2 = \lambda(\mathcal{G})$, 即对 $\forall F \in \lambda(\mathcal{G}), \forall E \in \lambda(\mathcal{G})$, 有 $E \bigcap F \in \lambda(\mathcal{G})$. 这意味着 $\lambda(\mathcal{G})$ 是 π 系，因而证明了第一个结论．第二个结论证明类似，可以在任何一本测度论的书中找到．

习题 0.1 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一可测空间, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 为一 π 系且 $\Omega \in \mathcal{G}$, μ 和 ν 为 $\mathcal{F}$ 上的两个有界符号测度, 若在 $\mathcal{G}$ 上 μ 和 ν 一致, 则在 $\sigma(\mathcal{G})$ 上 μ 和 ν 一致.

定理 A.2 设 $\mathcal{G}$ 为 Ω 的子集构成的一个 π 系, $\mathcal{L}$ 为 Ω 上的实值函数的一个线性空间, 且满足以下条件:

1° $1 \in \mathcal{L}$;

2° $\{f_n\} \subset \mathcal{L}$, $0 \le f_n \uparrow f$, f 有限 (或有界)$\Longrightarrow f \in \mathcal{L}$;

3° $E \in \mathcal{G} \Longrightarrow 1_E \in \mathcal{L}$,

则 $\mathcal{L}$ 包含 Ω 上一切 $\sigma(\mathcal{G})$ 可测的实值 (或有界) 函数.

证 令 $\mathcal{F} \equiv \{F \in \sigma(\mathcal{G});\ 1_F \in \mathcal{L}\}$, 容易验证, $\mathcal{F}$ 是含 $\mathcal{G}$ 的 λ 系, 由定理 A.1, $\sigma(\mathcal{G}) = \lambda(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{G})$, 故 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$. 设 f 为任一 $\sigma(\mathcal{G})$ 可测的实值 (或有界) 函数, 令

$$f_n \equiv \sum_{k=1}^{n2^n} (k-1)2^{-n} 1_{[(k-1)2^{-n} \le f^+ < k2^{-n}]}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

则 $\{f_n\} \subset \mathcal{L}$, 且 $0 \le f_n \uparrow f^+$, 由条件 2°, $f^+ \in \mathcal{L}$; 同理可证 $f^- \in \mathcal{L}$, 于是 $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}$.

习题 0.2 设 $\{X_\alpha,\ a \in \Gamma\}$ 是 Ω 上任意一族实值函数. 为使 Ω 上的实值函数 f 关于 σ- 代数 $\sigma\{X_\alpha,\ a \in \Gamma\}$ 可测, 其必要充分条件是: 存在某个 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ 可测函数 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots)$ 及 $\{\alpha_n\} \subset \Gamma$, 使

$$f(\omega) = \varphi(X_{\alpha_1}(\omega), X_{\alpha_2}(\omega), \cdots).$$

定理 A.3 设 $\mathcal{L}$ 为 Ω 上一族有界函数构成的 **单调族** (即对一致有界单调序列极限封闭). 设 $1 \in \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, 且 $\mathcal{L}_0$ 为 **线性格**(即对格运算: $f \bigwedge g = \min(f, g)$ 及 $f \bigvee g = \max(f, g)$ 封闭的线性空间). 则 $\mathcal{L}$ 包含一切有界 $\sigma\{f, f \in \mathcal{L}_0\}$ 可测函数.

证 令 $\widetilde{\mathcal{L}}$ 为包含 $\mathcal{L}_0$ 的最小单调族, 并令

$$\mathcal{L}_1 \equiv \{f \in \widetilde{\mathcal{L}};\ \forall a \in \mathbb{R},\ af \in \widetilde{\mathcal{L}}\},$$

则 $\mathcal{L}_1$ 为包含 $\mathcal{L}_0$ 的单调族, 故 $\mathcal{L}_1 = \widetilde{\mathcal{L}}$. 再令

$$\mathcal{L}_2 \equiv \{f \in \widetilde{\mathcal{L}};\ \forall g \in \mathcal{L}_0,\ f + g \in \widetilde{\mathcal{L}},\ f \wedge g \in \widetilde{\mathcal{L}}\},$$

则 $\mathcal{L}_2$ 为包含 $\mathcal{L}_0$ 的单调族，故 $\mathcal{L}_2=\tilde{\mathcal{L}}$. 再令

$$\mathcal{L}_3\equiv\{f\in\tilde{\mathcal{L}};\ \forall g\in\tilde{\mathcal{L}},\ f+g\in\tilde{\mathcal{L}},\ f\wedge g\in\tilde{\mathcal{L}}\},$$

则 $\mathcal{L}_3$ 为包含 $\mathcal{L}_0$ 的单调族，故 $\mathcal{L}_3=\tilde{\mathcal{L}}$. 这就意味着 $\tilde{\mathcal{L}}$ 为一线性格.

令 $\mathcal{F}\equiv\{F\subset\Omega;\ \mathbf{1}_F\in\tilde{\mathcal{L}}\}$, 容易验证 $\mathcal{F}$ 为 σ- 代数. 由定理 A.2, $\tilde{\mathcal{L}}$ 包含 Ω 上一切有界 $\mathcal{F}$ 可测函数. 因为 $\tilde{\mathcal{L}}\subset\mathcal{L}$, 为证定理，只须证明一切 $f\in\mathcal{L}_0$ 为 $\mathcal{F}$ 可测.

由于 $\mathcal{L}_0$ 为含常数的线性格, 任给 $f\in\mathcal{L}_0$, $a\in\mathbb{R}$ 有：$(f-a)^+=(f-a)\bigvee 0\in\mathcal{L}_0$. 设

$$f_n\equiv n(f-a)^+\wedge 1,\qquad n\in\mathbb{N},$$

则 $f_n\in\mathcal{L}_0$ 且 $0\le f_n\uparrow\mathbf{1}_{[f>a]}$. 由 $\tilde{\mathcal{L}}$ 为含 $\mathcal{L}_0$ 的单调族, 故 $\mathbf{1}_{[f>a]}\in\tilde{\mathcal{L}}$, 即 $[f>a]\in\mathcal{F}$. 既然对一切 $a\in\mathbb{R}$ 有 $[f>a]\in\mathcal{F}$, 因此 f 为 $\mathcal{F}$ 可测. 证毕.

推论 1 在定理 A.3 中，设 $1\in\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}$, 且 $\mathcal{L}_0$ 为**线性代数**，对一致收敛封闭，则定理结论成立.

证 只须证明 $\mathcal{L}_0$ 为线性格. 由于

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|),$$

故只要证明对 $\forall f\in\mathcal{L}_0$ 有 $|f|\in\mathcal{L}_0$.

由 f 有界，不妨设 $|f|\le 1$. 令 $Q_n(x)$ 为 $(1-x)^{1/2}$ 的 Taylor 展开式前 n 项之和，则 $Q_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $(1-x)^{1/2}$; 令 $P_n(x)\equiv Q_n(1-x^2)$, 则 $P_n(f)$ 一致收敛于 $|f|$. 因 $\mathcal{L}_0$ 为线性代数，故 $P_n(f)\in\mathcal{L}_0$, 又因 $\mathcal{L}_0$ 对一致收敛封闭，故 $|f|\in\mathcal{L}_0$.

推论 2 设 $\mathcal{L}$ 为 Ω 上一族有界函数构成的单调族且对一致收敛封闭. 又设 $\mathcal{L}$ 为线性空间，且 $1\in\mathcal{L}$. 若 $\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}$, 且满足

$$f,g\in\mathcal{L}_0\Longrightarrow fg\in\mathcal{L}_0,$$

则 $\mathcal{L}$ 包含一切有界 $\sigma\{f, f\in\mathcal{L}_0\}$ 可测函数.

证 令 $\tilde{\mathcal{L}}$ 为由 1 及 $\mathcal{L}_0$ 生成的线性代数. 则 $\tilde{\mathcal{L}}\subset\mathcal{L}$. 再令 $\overline{\mathcal{L}}$ 为 $\tilde{\mathcal{L}}$ 关于一致收敛拓扑的闭包, 则 $\overline{\mathcal{L}}\subset\mathcal{L}$, 且 $\overline{\mathcal{L}}$ 为线性代数, 对一致收敛封闭. 由推论 1 即得结论.

习题 0.3 设 Ω 为一距离空间, $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\Omega)$ 为其 Borel 子集 σ- 代数, P 和 Q 为 $\mathcal{F}$ 上两个概率测度. 若对 Ω 上一切有界连续函数 f 有

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega)=\int_\Omega f(\omega)Q(d\omega),$$

则在 $\mathcal{F}$ 上 $P=Q$.

附录 B 正则条件概率

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数， ξ 为一可积随机变量.

定义 B.1 ξ 关于 $\mathcal{G}$ 的 **条件期望** $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ 为一随机变量，满足：

1° $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$ 为 $\mathcal{G}$ 可测函数；

2° 对 $\forall G\in\mathcal{G}$ 有

$$\int_G \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]dP = \int_G \xi dP. \tag{B.1}$$

因为由 $Q(G)\equiv\int_G \xi dP$ 确定 $\mathcal{G}$ 上一个有限符号测度，且关于 P 绝对连续，而条件期望正是 Q 关于 P 在 $\mathcal{G}$ 上的 Radon-Nikodym 导数：

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{G}} \qquad \text{a.s.}, \tag{B.2}$$

它是 a.s. 唯一确定的. 条件期望具有以下性质：

定理 B.2 设 $\xi,\eta,\{\xi_n\}$ 均为可积随机变量， a,b 为实数， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数，则

1° $\mathbb{E}[a\xi+b\eta|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]+b\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]$ a.s.;

2° $\xi\geq 0$ a.s. $\Longrightarrow \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]\geq 0$ a.s.;

3° $\xi\eta$ 可积， ξ 为 $\mathcal{G}$ 可测 $\Longrightarrow \mathbb{E}[\xi\eta|\mathcal{G}] = \xi\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]$ a.s.,

特别

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \xi \qquad \text{a.s.};$$

4° 若 $\mathcal{G}_0$ 为 $\mathcal{G}$ 之子 σ- 代数，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]|\mathcal{G}_0] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}_0] \qquad \text{a.s.};$$

5° 若 φ 为 $\mathbb{R}$ 上的凸函数且使 $\varphi(\xi)$ 可积，则

$$\varphi(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(\xi)|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.},$$

特别

$$|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]| \le \mathbb{E}[|\xi||\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.};$$

6° ξ 与 $\mathcal{G}$ 独立的充分必要条件是: 对一切使 $f(\xi)$ 可积的 Borel 可测函数 f, 有

$$\mathbb{E}[f(\xi)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(\xi)] \qquad \text{a.s.};$$

7° $\xi_n \uparrow \xi \qquad \text{a.s.} \Longrightarrow \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.},$

$\xi_n \downarrow \xi \qquad \text{a.s.} \Longrightarrow \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \downarrow \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.};$

8° $\xi_n \ge \eta \qquad \text{a.s.}(\forall n \in \mathbb{N})$, 则

$$\mathbb{E}[\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n|\mathcal{G}] \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.};$$

9° $|\xi_n| \le \eta \qquad$ a.s., 且 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$, 则

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.};$$

10° $p \ge 1$, $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$, 则

$$\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{G}] \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}].$$

定义 B.3 设 $F \in \mathcal{F}$, 则

$$P[F|\mathcal{G}] \equiv \mathbb{E}[1_F|\mathcal{G}]$$

称为 F 关于 $\mathcal{G}$ 的 **条件概率**.

由条件期望性质可得

1° $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow 0 \le P[F|\mathcal{G}] \le P[\Omega|\mathcal{G}] = 1 \qquad$ a.s.;

2° $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$, 且两两不相交, 则

$$P[\cup_n F_n|\mathcal{G}] = \sum_n P[F_n|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.}; \tag{B.3}$$

3° 对 $F \in \mathcal{F}$ 及 $G \in \mathcal{G}$ 有

$$P(F \cap G) = \int_G P[F|\mathcal{G}]dP. \tag{B.4}$$

由于 (B.3) 中的例外集依赖于 $\{F_n\}$, 因此一般不能得出结论: 对几乎所有 $\omega, P[\cdot|\mathcal{G}](\omega)$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度. 但我们引进以下定义:

定义 B.4 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ- 代数. $\Omega \times \mathcal{F}$ 上的函数 $p(\omega, F)$, 若满足以下条件:

1° 对 $\forall \omega \in \Omega, p(\omega, \cdot)$ 为 $\mathcal{F}$ 上的概率;

2° 对 $\forall F \in \mathcal{F}, p(\cdot, F)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测随机变量;

3° 对 $\forall F \in \mathcal{F}$ 及 $\forall G \in \mathcal{G}$ 有

$$P(F \cap G) = \int_G p(\omega, F) dP, \tag{B.5}$$

则称为关于 $\mathcal{G}$ 的 **正则条件概率**.

显然, 若关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率存在, 则条件期望可表示成关于此正则条件概率的积分:

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}](\omega) = \int_\Omega \xi(\omega') p(\omega, d\omega') \qquad \text{a.s.}. \tag{B.6}$$

定理 B.5 若 Ω 为完备可分距离空间, $\mathcal{F}$ 为其 Borel 子集 σ- 代数, $\mathcal{G}$ 为其子 σ- 代数, P 为 $\mathcal{F}$ 上的概率测度, 则存在关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率 $p(\omega, F)$, 且在下述意义下是唯一的: 若另有一正则条件概率 $p'(\omega, F)$, 则存在 P- 零集 $N \in \mathcal{G}$, 当 $\omega \overline{\in} N$ 时, 有

$$p'(\omega, F) = p(\omega, F), \qquad \forall F \in \mathcal{F}.$$

证 设 $\mathcal{A}_0$ 为 Ω 的某一可数开基生成的代数, 则 $\mathcal{A}_0$ 本身可数 (见 Halmos[1]), 且 $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{F}$. 记 $\mathcal{A}_0 = \{A_n\}$. 由于 Ω 上概率测度的内正则性, 对每一 A_n 存在紧集序列 $\{K_{n,m}\}_{m \in N}$, 单调上升, 含于 A_n 内, 且当 $m \longrightarrow \infty$ 时有

$$P(K_{n,m}) \uparrow P(A_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

令 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{A}_0$ 及 $\{K_{n,m};\ n, m \in \mathbb{N}\}$ 所生成的代数, 同样地, $\mathcal{A}$ 为可数, 且 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.

对 $A \in \mathcal{A}$, 令 $\widetilde{p}(\omega, A)$ 为 $P[A|\mathcal{G}]$ 的任一等价形. 因 $\mathcal{A}$ 可数, 故存在 P 零集 $N_1 \in \mathcal{G}$, 当 $\omega \overline{\in} N_1$ 时, $\widetilde{p}(\omega, \cdot)$ 为 $\mathcal{A}$ 上有限可加非负集函数, 且 $\widetilde{p}(\omega, \Omega) = 1$.

因对每个 $A_n \in \mathcal{A}_0$ 有

$$\begin{aligned}\widetilde{p}(\omega, A_n) &= P[A_n|\mathcal{G}](\omega) \\ &= \lim_{m\to\infty} P[K_{n,m}|\mathcal{G}](\omega) \\ &= \lim_{m\to\infty} \widetilde{p}(\omega, K_{n,m}) \qquad \text{a.s.},\end{aligned}$$

故存在 P 零集 $N_2 \in \mathcal{G}$, 当 $\omega \overline{\in} N_2$ 时对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有上式成立. 令 $N = N_1 \bigcup N_2$, 则 $P(N) = 0$, 且当 $\omega \overline{\in} N$ 时, $\widetilde{p}(\omega, \cdot)$ 为 $\mathcal{A}_0$ 上有限可加非负集函数, 且对任一 $A \in \mathcal{A}_0$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset A$, 使 $\widetilde{p}(\omega, A \setminus K) < \varepsilon$. 因而 $\widetilde{p}(\omega, \cdot)$ 为 $\mathcal{A}_0$ 上的测度. 按测度开拓定理, 可唯一开拓为 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ 上的概率测度, 仍记为 $\widetilde{p}(\omega, \cdot)$.

在 $\Omega \times \mathcal{F}$ 上定义:

$$p(\omega, F) = \begin{cases} \widetilde{p}(\omega, F), & \text{若 } \omega \overline{\in} N, \\ Q(F), & \text{若 } \omega \in N, \end{cases}$$

其中 Q 为 $\mathcal{F}$ 上任一概率测度. 显然这样定义的函数满足条件 1°. 令

$$\mathcal{F}_0 \equiv \{F \in \mathcal{F};\ p(\cdot, F) \text{ 为 } \mathcal{G} \text{ 可测, 且}$$

$$p(\cdot, F) = P[F|\mathcal{G}] \qquad \text{a.s.}\},$$

则 $\mathcal{F}_0$ 为含 $\mathcal{A}_0$ 的单调类, 由定理 A.1 可知 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, 即此函数同时满足条件 2° 和 3°.

设存在另一函数 $p'(\omega, F)$ 满足条件 1° ~ 3°, 则对 $\forall A \in \mathcal{A}_0$ 及 $G \in \mathcal{G}$ 有

$$\int_G p(\omega, A)dP = P(A \cap G) = \int_G p'(\omega, A)dP.$$

因 $p(\cdot, A)$ 及 $p'(\cdot, A)$ 为 $\mathcal{G}$ 可测，故

$$p(\omega, A) = p'(\omega, A) \qquad \text{a.s..}$$

由 $\mathcal{A}_0$ 可数，可除开一个 P 零集 $N_0 \in \mathcal{G}$ 外，使上式对一切 $A \in \mathcal{A}_0$ 成立，但由开拓的唯一性，上式对一切 $A \in \mathcal{F}$ 也成立，得证唯一性.

推论 1 在定理 B.5 条件下，存在 P 零集 $N \in \mathcal{G}$, 当 $\omega \overline{\in} N$ 时有

$$p(\omega, G) = \mathbf{1}_G(\omega), \qquad \forall G \in \mathcal{G}. \tag{B.7}$$

推论 2 在定理 B.5 的条件下，若

$$X : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$$

为到另一完备可分距离空间 E 的 $\mathcal{G}/\mathcal{B}$ 可测映象，其中 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ 为 E 的 Borel 子集 σ- 代数，且对 $\forall x \in E$ 有 $\{x\} \in \mathcal{B}$, 则

$$p(\omega, X^{-1}\{x\}) = \mathbf{1}_{\{x\}}(X(\omega)) \qquad \text{a.s..} \tag{B.8}$$

因此任一 $\mathcal{G}$ 可测随机变量，在关于 $\mathcal{G}$ 的正则条件概率 $p(\omega, \cdot)$ 下，以概率 1 为一常数.

附录 C　距离空间中概率测度的弱收敛

设 (E,ρ) 为一可分距离空间，$\mathcal{B}=\mathcal{B}(E)$ 为其 Borel 子集 σ - 代数．$C_b(E)$ 为 E 上一切有界连续函数构成的 Banach 空间，其范数为

$$\|f\|\equiv\sup_{x\in E}|f(x)|,\qquad f\in C_b(E).$$

定义 C.1　设 $\{P_n\}$ 及 P 为 $(E,\mathcal{B})$ 上的概率测度．若对 $\forall f\in C_b(E)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)P_n(dx)=\int_E f(x)P(dx),\tag{C.1}$$

则称 $\{P_n\}$弱收敛 于 P, 记为 $P_n\xrightarrow{w}P$.

定理 C.2　下述命题等价：

1°　$P_n\xrightarrow{w}P$;

2°　对一切一致连续函数 $f\in C_b(E)$, 有 (C.1);

3°　对 E 中一切闭集 F, 有

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(F)\le P(F);$$

4°　对 E 中一切开集 G, 有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}P_n(G)\ge P(G);$$

5°　若 $A\in\mathcal{B},P(\partial A)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}P_n(A)=P(A).$$

其中 ∂A 为 A 之 边界点 集合，即 $\partial A=\overline{A}-A^{\circ},\overline{A}$ 为 A 之 闭包，A° 为 A 之 内核.

证　$1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$ 是显然的. 为证 $2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$, 对闭集 F 及 $x\in E$, 令 $\rho(x,F)$ 为 x 至 F 的距离, 对 $k\in \mathbb{N}$, 令 $f_k(x)\equiv(1+\rho(x,F))^{-k}$, 则 f_k 于 E 一致连续, 且 $f_k\downarrow \mathbf{1}_F$, 由 2°

$$\begin{aligned}P(F)&=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)P(dx)\\&=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_E f_k(x)P_n(dx)\\&\geq \overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(F),\end{aligned}$$

得证 3°.3° 和 4° 是对偶命题, 故 $3^\circ \Longleftrightarrow 4^\circ$. 现证: $3^\circ,4^\circ \Longrightarrow 5^\circ$.

对 $A\in\mathcal{B}$, 若 $P(\partial A)=0$, 则由 3° 及 4°

$$\begin{aligned}&\overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(A)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(\overline{A})\leq P(\overline{A})=P(A^\circ)\\&\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}P_n(A^\circ)\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}P_n(A),\end{aligned}$$

于是 $\lim_{n\to\infty}P_n(A)=P(A)$. 剩下要证明 $5^\circ\Longrightarrow 1^\circ$.

设 $f\in C_b(E)$, $\varepsilon>0$. 对区间 $[-\|f\|-1,\|f\|+1]$ 作有限分割:

$$-\|f\|-1=a_0<a_1<\cdots<a_m=\|f\|+1,$$

使 $\max_{1\leq k\leq m}(a_k-a_{k-1})<\varepsilon$, 且 $P\{x;f(x)=a_k\}=0(k=1,2,\cdots,m-1)$. 令 $A_k\equiv\{x;a_{k-1}\leq f(x)<a_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$, 则 $P(\partial A_k)=0$, 且

$$\|f-\sum_{k=1}^m a_k\mathbf{1}_{A_k}\|<\varepsilon.$$

由 5°

$$\begin{aligned}&\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\int_E f(x)P_n(dx)-\int_E f(x)P(dx)\right|\\&\leq 2\varepsilon+\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\int_E\Big(\sum_{k=1}^m a_k\mathbf{1}_{A_k}(x)\Big)P_n(dx)\right.\\&\quad\left.-\int_E\Big(\sum_{k=1}^m a_k\mathbf{1}_{A_k}(x)\Big)P(dx)\right|\\&\leq 2\varepsilon+\sum_{k=1}^m|a_k|\overline{\lim}_{n\to\infty}|P_n(A_k)-P(A_k)|=2\varepsilon,\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得证弱收敛性.

定义 C.3 设 Λ 为 $(E,\mathcal{B})$ 上的一族概率测度. 若 Λ 中每一无穷序列包含弱收敛于某概率测度的子序列, 则 Λ 称为 **相对弱紧**; 若对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 E 的紧子集 K, 使

$$\inf_{P\in\Lambda} P(K)\geq 1-\varepsilon, \tag{C.2}$$

则 Λ 称为 **胎紧**(tight).

定理 C.4 设 Λ 为可分距离空间 $(E,\mathcal{B})$ 上的一族概率测度. 若 Λ 为胎紧, 则 Λ 为相对弱紧; 若此距离空间 **完备**, 则胎紧和相对弱紧等价.

证 若 E 为紧距离空间, 则由 Riesz 定理, 其上任一族概率测度均为 $C(E)=C_b(E)$ 的共轭空间 $C(E)^*$ 中单位球的子集, 而弱收敛相当于在 $C(E)^*$ 中的弱 * 收敛. 但 $C(E)^*$ 中单位球是弱 * 紧的, 因而任一族概率测度均为相对弱紧.

在一般情况下, E 同胚于某个紧距离空间的 Borel 子集. 故不妨设 E 本身就是某紧距离空间 $\widetilde{E}$ 的 Borel 子集. 令 $\widetilde{\mathcal{B}}\equiv\mathcal{B}(\widetilde{E})$, 则 $\widetilde{\mathcal{B}}\bigcap E=\mathcal{B}$. 对 $\mathcal{B}$ 上任一概率 P, 令 $\widetilde{P}(\cdot)\equiv P(\cdot\bigcap E)$, 则 $\widetilde{P}$ 为 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 上的概率.

设 Λ 胎紧, $\{P_n\}$ 为 Λ 中任一无穷序列, 则其开拓 $\{\widetilde{P}_n\}$ 为 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 上的概率序列. 因 $\widetilde{E}$ 为紧距离空间, 根据上面的讨论, 必存在子序列, 不妨仍记为 $\{\widetilde{P}_n\}$, 弱收敛于 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 上某个概率 Q. 由假定的胎紧性, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在 E 的紧子集 K_k, 使

$$\inf_n P_n(K_k)\geq 1-\frac{1}{k}\qquad (k\in\mathbb{N}),$$

显然 K_k 也是 $\widetilde{E}$ 的紧子集, 且 $\widetilde{P}_n(K_k)=P_n(K_k)$.

因 $\widetilde{P}_n\xrightarrow{w}Q$, 根据定理 C.2 之 3° 有

$$Q(K_k)\geq\overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(K_k)\geq 1-\frac{1}{k}\qquad (k\in\mathbb{N}),$$

令 $B\equiv\bigcup_k K_k$, 则 $Q(B)=1$. 再令 P 为 Q 在 B 上的限制, 则 P 为 B 上的概率, 且其开拓为 Q.

设 F 为 E 中任一闭集, 则存在 $\widetilde{E}$ 中闭集 $\widetilde{F}$, 使 $F=\widetilde{F}\bigcap E$. 于是由定理 C.2 之 3°

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}P_n(F)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\widetilde{P}_n(\widetilde{F})\le Q(\widetilde{F})=P(F),$$

因而 $P_n\xrightarrow{w}P$, 得证 Λ 为相对弱紧.

至于在完备可分距离空间中两者的等价性, 证明可参看 Billingsley[1], 由于我们不用这个结论, 故从略.

设 X 为 E 值随机变量 (随机元), 即定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值 E 的 $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ 可测映象. X 的 **分布** $\widehat{\mu}_X\equiv P\circ X^{-1}$ 是 $(E,\mathcal{B})$ 上的概率测度.

定义 C.5 设 $\{X_n\}$ 及 X 为 E 值随机变量 (不必定义在同一概率空间上). 若 $\widehat{\mu}_{X_n}\xrightarrow{w}\widehat{\mu}_X$, 则称 $\{X_n\}$**依分布收敛** 于 X.

我们知道, 以概率 1 收敛蕴含依概率收敛, 依概率收敛蕴含依分布收敛. 下面由 Skorohod[1] 得到的定理表明, 当 E 为完备可分距离空间时, 在某种意义上有相反的蕴含关系.

定理 C.6 设 (E,ρ) 为完备可分距离空间, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(E)$, $\{\mu_n\}$ 及 μ 为 $(E,\mathcal{B})$ 上的概率测度. 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$, 则存在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上的 E 值随机变量 $\{X_n\}$ 及 X, 满足:

1° $\mu_n=\widehat{\mu}_{X_n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 及 $\mu=\widehat{\mu}_X$;

2° $X_n\xrightarrow{\text{a.s.}}X$.

证 我们可以取 $\Omega=[0,1)$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1))$, P 为 Lebesgue 测度. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 用半径不超过 $2^{-(k+1)}$ 的球 $\{B_j^k,\ j\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 E, 且使 $\mu(\partial B_j^k)=0$, $\mu_n(\partial B_j^k)=0$ $(k,j,n\in\mathbb{N})$. 令 $D_1^k=B_1^k$, $D_2^k=B_2^k\setminus B_1^k$, $D_3^k=B_3^k\setminus(B_1^k\bigcup B_2^k),\cdots$, 则 $\{D_j^k,j\in\mathbb{N}\}$ 构成 E 之分割. 对任意指标 $(j_1,\cdots,j_k)$, 令

$$S_{j_1,\cdots,j_k}\equiv D_{j_1}^1\cap D_{j_2}^2\cap\cdots\cap D_{j_k}^k,$$

则对固定的 k, $\{S_{j_1,\cdots,j_k},j_1,\cdots,j_k\in\mathbb{N}\}$ 构成 E 之分割, 且此分割序列随 k 增大而加密.

将 $\Omega = [0,1)$ 相应地分割为一些左闭右开区间 $\{\Delta_{j_1,\cdots,j_k}; j_1\cdots,j_k \in \mathbb{N}\}$ 使 $P(\Delta_{j_1,\cdots,j_k}) = \mu(S_{j_1,\cdots,j_k})$ 对任意指标 $(j_1,\cdots,j_k) \in \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$ 均成立，且这些区间按指标的某种固定顺序自左至右相邻接，显然这种分划是唯一确定的.

如果 $\Delta_{j_1,\cdots,j_k} \neq \emptyset$, 则 $S^\circ_{j_1,\cdots,j_k} \neq \emptyset$, 于是可选 $x_{j_1,\cdots,j_k} \in S^\circ_{j_1,\cdots,j_k}$, 并构造 E 值随机变量序列如下：

$$X^k(\omega) = x_{j_1,\cdots,j_k} \qquad \text{若 } \omega \in \Delta_{j_1,\cdots,j_k}$$
$$(j_1,\cdots,j_k) \in \mathbb{N}^k, k \in \mathbb{N},$$

显然，对 $\forall k,p \in \mathbb{N}$ 有

$$\rho(X^k(\omega),\ X^{k+p}(\omega)) \leq 2^{-k},$$

由 (E,ρ) 的完备性，必存在极限 $X(\omega) = \lim_{k\to\infty} X^k(\omega)$.

因为

$$\begin{aligned}&P\{\omega;\ X^{k+p}(\omega) \in \overline{S}_{j_1,\cdots,j_k}\}\\ &= P\{\omega;\ X^{k+p}(\omega) \in S^\circ_{j_1,\cdots,j_k}\} = \mu(S_{j_1,\cdots,j_k}),\end{aligned}$$

而 E 中任意开集 G 均可表示为 $\{S_{j_1,\cdots,j_k}, (j_1,\cdots,j_k) \in \mathbb{N}^k, k \in \mathbb{N}\}$ 中集合的不相交可列并集，故由 Fatou 引理有

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \widehat{\mu}_{X^k}(G) \geq \mu(G),$$

由定理 C.2 之 4° 可知，$\widehat{\mu}_{X^k} \xrightarrow{w} \mu\ (k \longrightarrow \infty)$. 于是 $\widehat{\mu}_X = \mu$.

对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 在上述过程中以 μ_n 代 μ, 得到区间序列 $\{\Delta^{(n)}_{j_1,\cdots,j_k}\}$, $X^k_n(\omega)$ 及其极限 $X_n(\omega)$. 同样推理，得 $\widehat{\mu}_{X_n} = \mu_n$. 剩下要证明：$X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

由 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, 根据定理 C.2 之 5°, 对一切 $S_{j_1,\cdots,j_k}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(S_{j_1,\cdots,j_k}) = \mu(S_{j_1,\cdots,j_k}),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P(\Delta^{(n)}_{j_1,\cdots,j_k}) = P(\Delta_{j_1,\cdots,j_k}).$$

若 $\omega \in \Delta^{\circ}_{j_1,\cdots,j_k}$, 则必存在 $n_k \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq n_k$ 时有 $\omega \in \Delta^{(n)\circ}_{j_1,\cdots,j_k}$, 于是 $X^k_n(\omega) = X^k(\omega)$, 且

$$\begin{aligned}&\rho(X_n(\omega), X(\omega)) \leq \rho(X_n(\omega), X^k_n(\omega)) \\ &+ \rho(X^k_n(\omega), X^k(\omega)) + \rho(X^k(\omega), X(\omega)) \leq 2^{-k+1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (n \geq n_k,\ k \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

令 $\Omega_0 \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j_1,\cdots,j_k} \Delta^{\circ}_{j_1,\cdots,j_k} \right)$, 则 $P(\Omega_0) = 1$, 当 $\omega \in \Omega_0$ 时有 $\lim_{n\to\infty} K_n(\omega) = X(\omega)$, 定理证毕.

参 考 文 献

L. Arnold

[1] Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Wiley, NY(1974)

R. F. Bass

[1] Probabilistic Techniques in Analysis, Springer-Verlag (1995)

E. G. Beltrametti & G. Cassinelli

[1] The Logic of Quantum Mechanics. Addison-Wesley, London(1981)

S. N. Bernstein (C. H. Бернштейн)

[1] Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilité, Proc. Kharkhov Math. Soc. XIII (1912)

K. Bichteler

[1] Stochastic integration and L^p theory of semimartingales, Ann. of Prob., 9, 49–89(1981)

K. Bichteler & J. Jacod

[1] Calcul de Malliavin pour les diffusions avec sautes: Existence d'une densité dans le cas unidimensionnel, Lecture Notes in Math., 986, 132–157, Springer, Berlin(1983)

P. Billingsley

[1] Convergence of Probability Measures, Wiley, NY(1968)

J. M. Bismut

[1] Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 56, 469–505(1981)

[2] Calcul des variations stochastique et processus de sauts, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 63, 147–235(1983)

[3] Large Deviations and Malliavin Calculus, Birkhäuser, Boston (1984)

[4] The Atiyah-Singer theorem: a probabilistic approach, I. The index theorem, J. Funct. Anal., 57, 56–99(1984)

F. Black & M. Scholes

[1] The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econom., 81,637–659(1973)

R. H. Cameron & W. T. Matin

[1] Transformation of Wiener integrals under translations, Ann. Math., 45, 386–396(1944)

G. Choquet

[1] Theory of capatities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 5, 131–295 (1953–54)

[2] Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 9, 83–89(1959)

K. L. Chung(钟开莱) & R. J. Williams

[1] Introduction to Stochastic Integration, Birkhäuser, Boston(1983)

G. Da Prato & J. Zubczyk

[1] Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Cambridge Univ. Press(1993)

C. Dellacherie

[1] Capacités et Processus Stochastiques, Springer, Berlin(1972)

[2] Un survol de la theorie de l'integrale stochastique, Stoc. Proces. Appl., 10, 115–144(1980)

C. Dellacherie & P. A. Meyer

[1] Probabilités et Potentiel, 2e édition, chapitres Ⅰ - Ⅳ, Hermann, Paris(1975)

[2] Probabilités et Potentiel, 2e édition, chapitres Ⅴ - Ⅷ, Hermann, Paris(1980)

C. Doléans-Dade

[1] Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la class(D), Z. Wahrs. verw. Gebiete, 9, 309–314(1969)

C. Doléans-Dade & P. A. Meyer

[1] Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Lecture Notes in Math., 124, 77–107, Springer, Berlin(1970)

J. L. Doob

[1] Stochastic Processes, John Wiley, NY(1953)

H. Doss

[1] Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré, Set. B., 13, 99–125(1977)

N. Dunford & J. T. Schwarz

[1] Linear Operators(Ⅲ), Wiley, NY(1971)

J. Eells & K. D. Elworthy

[1] Stochastic dynamical systems, Control theory and topics in functional analysis, Ⅲ, 179–185, Intern. atomic energy agency, Vienna(1976)

R. J. Elliott
[1] Stochastic Calculus and Applications, Springer, NY 1982
K. D. Elworthy
[1] Stochastic dynamical system and their flows, Stochastic Analysis (ed. by A. Friedman & M. Pinsky), 79–95, Academic, NY(1978)
[2] Stochastic Differential Equations on Manifolds, Cambridge Univ. Press (1982)
M. Emery
[1] Stochastic Calculus in Manfolds, Springer(1989)
A. F. Fillipov (А. Ф. Филиппов)
[1] Differential equations with discontinuous right hand side (in Russian), Mat. Sb. (N. S.)51, 99–128(1960)
D. L. Fisk
[1] Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 369–389 (1965)
M. I. Freidlin(М. И. Фрейдлин)
[1] Markov Processes and Differential Equations (in Russian), Ser. "Itogi Nauki", Viniti(1967)
[2] Functional Integration and Partial Differential Equations, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, NJ(1985)
A. Friedman
[1] Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. 1–2, Academic, NY(1975)
M. Fujisaki, G. Kallianpur & H. Kunita (國田寬)
[1] Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, Osaka J. Math., 9, 19–40(1972)
M. Fukushima (福島正俊)
[1] Basic properties of Brownian motion and a capacity on the Wiener space, J. Math. Soc. Japan, 36, 161–176(1984)
B. Gaveau & P. Trauber
[1] L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel, J. Funct. Anal., 46, 230–238(1982)
B. Gaveau & J. Vauthier
[1] Intégrals stochastique oscillantes: l'équation de Pauli, J. Funct. Anal., 44, 388–400(1981)
I. M. Gelfand(И. М. Гельфанд) & G. E. Silov (Г. Е. Шилов)
[1] Generalized Functions, Vol. 2, Function and Generalized Function Spaces, Academic(1966) (中译本，广义函数 II，朱樵译，科学

出版社 (1985))
I. I. Gihman(И. И. Гихман)
[1] A method of constructing random processes (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 58, 961−964(1947)
I. I. Gihman & A. V. Skorohod(A. B. Скороход)
[1] Stochastic Differential Equations (translated from the Russian by K. Wickwire), Springer, Berlin(1972)
[2] The Theory of Stochastic Processes(Ⅲ)(translated from the Russian by S. Kotz), Springer, Berlin(1979)
I. V. Girsanov(И. В. Гирсанов)
[1] On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory Prob. Appl. 5, 285−301(1960)
G. Gong(龚光鲁)
[1] 随机微分方程引论，北京大学出版社 (1987)
P. R. Halmos
[1] Measure Theory, Van Nostrand, NY(1950)
S. W. He(何声武), J. G. Wang(汪嘉冈) & J. A. Yan(严加安)
[1] 半鞅与随机分析，科学出版社 (1995)
T. Hida(飞田武幸)
[1] Brownian Motion (translated from the Japanese by the author and T. P. Speed), Springer, NY(1980)
[2] Analysis of Brownian Functionals, Carleton Math. Lect. Notes, 13, Ottawa(1975)
L. Hörmander
[1] Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119, 147−171(1967)
X. Hu(胡宣达)
[1] 随机微分方程稳定性理论，南京大学出版社 (1986)
Z. Huang(黄志远)
[1] Stochastic integrals on general topological measurable spaces, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 66, 25−40(1984)
[2] On the generalized sample solutions of stochastic boundary value problems, Stochastics, 11, 237−248(1984)
[3] A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications, Proc. AMS, 91:4, 611−617(1984)

[4] Malliavin 随机变分学及其应用，应用概率统计，第一卷第二期，161−172(1985)
[5] An introduction to quantum stochastic calculus, 数学进展 17, 360−378(1988)
[6] Spectral analysis for stochastic integral operators (to appear)
[7] Stochastic calculus of variation on Gaussian space and white noise analysis, In: Gaussian Random Field, World Sci., 227−241 (1991)
[8] Quantum white noises-white noise approach to quantum stochastic calculus, Nagoya Math. J., 129, 23−42(1993)

Z. Huang(黄志远) & Y. Liao(廖玉麟)
[1] 随机积分算子的谱论，武汉大学学报 (自然科学版) 4,17−24 (1986)

Z. Huang(黄志远) & S. Luo(骆顺龙)
[1] Quantum white noises and free fields, Inf. Dim. Anal. Quan, Prob. Rel. Topics, 1, 69−82(1998)

Z. Huang(黄志远) & J. Ren(任佳刚)
[1] Quasi sure stochastic flows, Stochastics, 33, 149−157(1990)

Z. Huang(黄志远), M. Xu(许明浩) & Z. Hu(胡则成)
[1] 随机微分方程的样本广义解，武汉大学学报 (自然科学版) 2, 11−21 (1981)

Z. Huang(黄志远) & J. A. Yan(严加安)
[1] 无穷维随机分析引论，科学出版社 (1997)

G. A. Hunt
[1] Markoff processes and potentials(I - III), Ill. J. Math., 1, 44−93, 316−369 (1957); 2, 151−213(1958)

N. Ikeda(池田信行), I. Shigekawa(重川一郎) & S. Taniguchi(谷田说男)
[1] The Malliavin calculus and long time asymptotics of certain Wiener integrals, Proc. Centre for Math. Anal., Australia National Univ., Vol. 9, 46−113(1985)

N. Ikeda(池田信行) & S. Watanabe(渡边信三)
[1] Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed., Kodansha, Tokyo/North-Holland, Amsterdam(1989)
[2] An introduction to Malliavin's calculus, Stochastic Analysis, Proc. Taniguchi Symp. Katata 1982, 1−52, Kinokuniya(1984)
[3] Malliavin calculus of Wiener functionals and its applications, Warwick Symp. on SDE and Applications 1984/85, 132−178, Longman, NY(1986)

K. Itô(伊藤清)

[1] Markoff 过程ヲ定メル微分方程式, Zenkoki Shijo Sugaku Danwakai, 244, No. 1077, 1352−1400(1942)

[2] Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20, 519−524(1944)

[3] On a formule concerning stochastic differentials, Nagoya Math. J., 3, 55−65(1951)

[4] Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan, 3, 157−169(1951)

[5] Stochastic differentials, Appl. Math. Opt., 1, 374−381(1975)

[6] 确率解析学のなりたち, 数学, 34, 171−181(1982)

K. Itô(伊藤清) & H. P. Mckean, Jr.

[1] Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer, Berlin (1965)

J. Jacod

[1] Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales, Lecture Notes in Math., 714, Springer, Berlin(1979)

R. E. Kalman

[1] A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 82, 34−45(1960)

R. E. Kalman & R. S. Bucy

[1] New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 83, 95−108(1961)

I. Karatzas

[1] Lectures on the Mathematics of Finance, CRM Monograph Series, Vol. 8, AMS(1997)

I. Karatzas & S. E. Shreve

[1] Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag(1988)

N. Kazamaki

[1] The equivalence of two conditions on weighted norm inequalities for martingales, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, 141−152, Kinokuniya(1978)

P. E. Kloeden & E. Platen

[1] Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer (1992)

P. Kopp

[1] Martingales and Stochastic Integrales, Cambridge Univ. Press (1984)

M. A. Krasnosel'ski(M. A. Красносельский) & A. V. Pokrovski(A. B. Покровский)

[1] Natural solutions of stochastic differential equations, Soviet Math. Dokl., 19:3, 578–582(1978)

N. V. Krylov (Н. В. Крылов)

[1] Controlled Diffusion Processes(translated from the Russian by A. B. Aries), Springer, NY(1980)

[2] Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations of Second Order(in Russian), Nauka, Moskow (1985)

H. Kunita(国田宽)

[1] On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, Stochastic Integrals, Proc. Durham Conf., Lecture Notes in Math., 851, 213–255, Springer, Berlin(1981)

[2] Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms, Lecture Notes in Math., 1097, 143–303, Springer, Berlin(1984)

[3] Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations, Cambridge Univ. Press(1990)

H. Kunita(国田宽) & S. Watanabe(渡边信三)

[1] On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30, 209–245(1967)

H. H. Kuo(郭辉雄)

[1] Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notes in Math., 463, Springer, Berlin(1975)

S. Kusuoka(楠冈成雄)

[1] The generalized Malliavin calculus based on Brownian sheet and Bismut's expansion for large deviation, Lecture Notes in Math., 1158, 141–157, Springer, Berlin (1984)

S. Kusuoka(楠冈成雄) & D. W. Stroock

[1] Applications of the Malliavin calculus, Part I, Stochastic Analysis, Proc. Taniguchi Symp. Katata 1982, 271–306, Kinokuniya(1984)

[2] ~, Part Ⅱ, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math., 32, 1–76(1985)

[3] ~, Part Ⅲ J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, 34, 391–442(1987)

[4] The partial Malliavin calculus and its application to nonlinear filtering, Stochastics, 12, 83–142(1984)

P. Langevin

[1] Sur la théorie du mouvement brownien, C. R. Acad. Sci. Paris, 146, 530–533(1908)

P. Lévy
[1] Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier -Villars, Paris(1948)
P. Malliavin
[1] Géométrie Différentielle Stochastique, Les Presses de l'Université de Montréal(1978)
[2] Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, 195−263, Kinokuniya(1978)
[3] C^k-hypoellipticity with degeneracy, Stochastic Analysis(ed. by A. Friedman & M. Pinsky), 199−214, 327−340, Academic, NY (1978)
[4] Implicit functions in finite corank on the Wiener space, Stochastic Analysis Proc.Taniguchi Symp.Katata 1982, Kinokuniya(1984)
[5] Sur certaines intégrales stochastiques oscillantes, C. R. Acad. Sci, Paris, 295, 295−300(1982)
[6] Analyse differentielle sur l'espace de Wiener, Proc. ICM Warszawa 1983, 2(PWN), Secondary, 1089−1096(1984)
[7] Intégrales stochastiques oscillantes et une formule de Feynman-Kac positive, C. R. Acad. Sci. Paris, 300, 141−143(1985)
[8] 泛函积分与偏微分方程，数学进展， 15,2,131−174(1986)
[9] Stochastic Analysis, Springer-Verlag(1997)
H. P. Mckean, Jr.
[1] Stochastic Integrals, Academic, NY(1969)
[2] Brownian local times, Adv. Math., 16, 91−111(1975)
M. Métivier
[1] Reele und Vektorwertige Quasimartingale und die Theorie der Stochastischen Integration, Lecture Notes in Math., 607, Springer, Berlin(1977)
M. Métivier & J. Pellaumail
[1] Stochastic Integration, Academic, NY(1980)
P. A. Meyer
[1] A decomposition theorem for supermartingales, Ill. J. Math., 6, 193−205(1962)
[2] Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, Ill. J. Math., 7, 1−17(1963)
[3] Un cours sur les intégrales stochastiques, Lecture Notes in Math., 511, 245−400, Springer, Berlin(1976)

[4] Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley, Lecture Notes in Math., 511, 142−163, Springer, Berlin (1976)
[5] Notes sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck, Lecture Notes in Math., 920, 95−133, Springer, Berliln (1982)
[6] Quelques resultats analytique sur semigroupe d'Ornstein-Uhlen beck en dimension infinie, Theory and Applications of Random Fields, Lecture Notes in Contr. and Inform. Sci., 49, 201−214, Springer, Berlin (1983)

P. A. Meyer & J. A. Yan(严加安)
[1] A propos des distributions sur l'espace de Wiener, Lecture Notes in Math., 1247, 8−26, Springer, Berlin(1987)

D. Michel
[1] Conditional laws and Hörmander's condition, Stochastic Analysis, Proc. Taniguchi Symp., Katata 1982, Kinokuniya(1984)

E. Nelson
[1] Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton Univ. Press(1967)
[2] The free Markov field, J. Funct. Anal., 12, 211−227(1973)

J. Neveu
[1] Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson, Paris(1964)
[2] Martingales à temps discret, Masson, Paris(1972)
[3] Sur l'espérance conditionelle par rapport à un mouvement brownien, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B. 12, 105−110(1976)

J. Norris
[1] Simplified Malliavin calculus, LNM, 1204, 101−130(1986)

A. A. Novikov(A. A. Новиков)
[1] On an identity for stochastic integrals, Theory Prob. Appl. 17, 717−720(1972)

D. Nualart
[1] The Malliavin Calculus and Related Topics, Springer(1996)

B. Øksendal
[1] Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications, 4th ed., Springer-Verlag(1995)

E. Pardoux
[1] Applications of anticipating stochastic calculus to stochastic differential equations, LNM, 1444, 63−105(1990)

G. Pisier

[1] Riesz transforms: A simple analytic proof of P. A. Meyer's inequality LNM, 1321, 485−501(1988)

J. Potthoff & L. Streit

[1] Invariant states on random and quantum fields: ϕ-bounds and white noise analysis, J. Funct. Anal., 111, 295−331(1993)

P. Protter

[1] Stochastic integration without tears, Stochastics, 16, 295−325 (1986)

[2] Stochastic Integration and Differential Equations, Springer (1990)

M. Reed & B. Simon

[1] Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1, Academic, NY(1972)

J. Ren(任佳刚)

[1] Analyse quasi-sûre des équations differentielles stochastiques, Bull. Sc. Math., 114, 187−214(1990)

[2] On smooth martingales, J. Funct. Anal., 120, 72−81(1994)

[3] Quasi sure quadratic variation of smooth martingales, J. Math. Kyoto Univ., 31, 191−206(1994)

[4] Some aspects of quasi sure analysis, 数学进展, 25, 481−491(1996)

D. Revuz & M. Yor

[1] Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag (1991)

R. T. Rockafellar

[1] Convex Analysis, Princeton Univ. Press(1970)

L. Schwartz

[1] Théorie des Distributions, Hermann, Paris(1978)

I. Shigekawa(重川一郎)

[1] Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures, J. Math. Kyoto Univ., 20, 263−289(1980)

[2] Lectures on Malliavin Calculus, preprint(1987)

A. V. Skorohod(А. В. Скороход)

[1] Studies in the Theory of Random Processes, (translated from the Russian by Scripta Technica) Addison Wesley, Reading, Mass. (1965)

[2] Integration in Hibert Space (translated form the Russian by K. Wickwire), Springer, NY(1974)

[3] On a generalization of a stochastic integral, Theory Probab. Appl., 20, 219−233(1975)

E. M. Stein

[1] Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press(1970)

R. L. Stratonovich(Р. Л. Стратонович)

[1] A new representation for stochastic integrals and equations, SIAM J. Control, 4, 362−371(1966)

L. Streit & T. Hida(飞田武幸)

[1] Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, Stochastic Processes and their Appl., 16, 55−69(1983)

D. W. Stroock

[1] On Topics in Stochastic Differential Equations, Tata Inst. Fund. Res., Springer, Berlin(1981)

[2] The Malliavin calculus and its application to second order partial differential equations, Math. System, 14, 25−65(1981)

[3] The Malliavin calculus, a functional analytic approach, J. Funct. Anal., 44, 212−257(1981)

[4] Some applications of stochastic calculus to partial differential equations, Lecture Notes in Math., 976, 267−382, Springer, Berlin (1983)

[5] Homogeneous chaos revisited, Lecture Notes in Math. 1247, 1−7, Springer, Berlin(1987)

D. W. Stroock & S. R. S. Varadhan

[1] Multidimensional Diffusion Processes, Springer, Berlin (1979)

H. Sugita(杉田洋)

[1] Sobolev spaces of Wiener functionals and Malliavin's calculus, J. Math. Kyoto Univ., 25, 31−48(1985)

[2] On a characterization of Sobolev spaces over an abstract Wiener space, J. Math. Kyoto Univ., 25, 717−725(1985)

H. J. Sussmann

[1] On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations, Ann. of Prob., 6:1, 19−41(1978)

M. Takeda

[1] (r, p) capacities on the Wiener space and properties of the Brownian motion, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 68, 149−162(1984)

S. Taniguchi(谷田说男)

[1] Malliavin stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 65, 260−290(1983)
G. E. Uhlenbeck & L. S. Ornstein
[1] On the theory of Brownian motion, Phys. Rev., 36, 823−841 (1930)
J. Van Schuppen & E. Wong
[1] Transformations of local martingales under a change of law, Ann. of Prob., 2, 879−888(1974)
S. Watanabe(渡边信三)
[1] Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus, Tata Inst. Fund. Res., Springer, Berlin (1984)
[2] Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels, Ann. of Prob., 15:1, 1−39(1987)
A. D. Wentzell(A. Д. Вентцель)
[1] A Course in the Theory of Stochastic Processes (translated form the Russian by S. Chomet), McGraw Hill(1981)
N. Wiener
[1] Differential space, J. Math. Phys., 2, 131−174(1923)
[2] The homogeneous chaos, Am. J. Math., 60, 897−936(1930)
L. Wu(吴黎明)
[1] Construction de l'opérateur de Malliavin sur l'espace de Poisson, Lecture Notes in Math., 1247, 100−113, Springer, Berlin(1987)
[2] Inégalité de Sobolev sur l'espace de Poisson, Lecture Notes in Math., 1247, 114−136, Springer, Berlin(1987)
T. Yamada(山田俊雄) & S. Watanabe(渡边信三)
[1] On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ., 11, 155−167(1971)
Y. Yamato
[1] Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras, Z. Wahrs. verw. Gebiete, 47, 213−229(1979)
J. A. Yan(严加安)
[1] 指数鞅一致可积性准则，数学学报， 23,2, 293−300(1980)
[2] 鞅与随机积分引论，上海科技出版社 (1981)
A. K. Zvonkin & N. V. Krylov (H. B. Крылов)
[1] On strong solutions of stochastic differential equations(in Russian), Proc. School-Seminar on Theor. Random Processes, Vilnius, Part Ⅱ， 9−88(1975)

名 词 索 引

(按拼音顺序，后面数字为节号及页码)

常 用 记 号

$\doteq$ 定义为

$\Longrightarrow$ 蕴含

$\Longleftrightarrow$ (命题) 等价

$\blacksquare$ 证明结束

$f|_A$ (函数)f 在 (集合)A 的限制

$\mathbf{1}_A$ (集合)A 的示性函数:　$\mathbf{1}_A(x) = 1(x \in A); = 0(x \overline{\in} A)$

δ_{ij} Kronecker 记号:　$\delta_{ij} = 1(i = j); = 0(i \neq j)$

δ_x 集中于 x 的单点 (Dirac) 测度

$\mathrm{sgn}(x)$ x 的符号函数:　$\mathrm{sgn}(x) = 1(x > 0); = 0(x = 0);$
$= -1(x < 0)$

$x \longmapsto f(x)$ 映象 $x \to f(x)$

$\mathrm{Dom}(f)$ (映象)f 的定义域

$\mathrm{Rg}(f)$ (映象)f 的值域

$\binom{n}{k}$ $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, n 个元素取 k 个的组合数

$a \wedge b$ $\min(a, b)$

$a \vee b$ $\max(a, b)$

x^+ $x \vee 0$, x 的正部

x^- $-(x \wedge 0)$, x 的负部

$a_n \uparrow a(a_n \downarrow a)$ $\{a_n\}$ 单调上升 (下降) 趋于 a

$a_n \uparrow\uparrow a(a_n \downarrow\downarrow a)$ $\{a_n\}$ 严格单调上升 (下降) 趋于 a

$\overline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} a_n$ $\inf_n \sup_{k \geq n}\{a_k\}$, 数列 $\{a_n\}$ 的上极限

$\underline{\lim}_{n \longrightarrow \infty} a_n$ $\sup_n \inf_{k \geq n}\{a_k\}$, 数列 $\{a_n\}$ 的下极限

$\mathbb{N}$ 自然数集合

$\mathbb{N}_0$ $\mathbb{N} \bigcup \{0\}$

$\overline{\mathbb{N}}_0$ $\mathbb{N}_0 \bigcup \{\infty\}$

$\mathbb{Z}$ 整数集合

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$ 有理数, 非负有理数集合

$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ 实数, 非负实数集合

$\overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathbb{R}_+ \bigcup \{\infty\}$

$\overline{\mathbb{R}}$　$\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}\bigcup\{\infty\}$

$\mathbb{R}^d$　d 维实数空间

$|x|$　$\mathbb{R}^d$ 中的范数：$|x|=\left(\sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{1/2}$

(x,y)　$\mathbb{R}^d$ 中的内积：$(x,y)=\sum_{k=1}^d x_k y_k$

S^{d-1}　$\mathbb{R}^d$ 中单位球面：$S^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d;|x|=1\}$

$\mathbb{R}^m\bigotimes\mathbb{R}^d$　实 $m\times d$ 矩阵全体所构成的 md 维欧氏空间

σ^*　矩阵 σ 的转置矩阵

$\mathcal{S}^m$　实 $m\times m$ 对称非负定矩阵的集合

$\mathrm{tr}a$　矩阵 $a=(a^{ij})_{1\le i,j\le m}$ 的迹：$\sum_{i=1}^m a^{ii}$

$\det a$　矩阵 a 的行列式

$\|\sigma\|$　矩阵 $\sigma=(\sigma_j^i)_{1\le i\le m,1\le j\le d}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数：

$$\|\sigma\|^2=\mathrm{tr}(\sigma\sigma^*)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d(\sigma_j^i)^2$$

$(\Omega,\mathcal{F},P)$　概率空间

$\overline{\mathcal{F}}^P$　(σ- 代数)$\mathcal{F}$ 关于 (测度)P 的完备化

$\mathbb{E}[\xi]$　(随机变量)ξ 的数学期望

$\mathrm{var}(\xi)$　(随机变量)ξ 的方差

$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}]$　(随机变量)ξ 关于 (子 σ- 代数)$\mathcal{G}$ 的条件期望

$\sigma(\mathcal{G})$　由 (集合系)$\mathcal{G}$ 产生的 σ- 代数

$\sigma(X_\alpha,\alpha\in\Gamma)$　由 (函数系)$\{X_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 产生的 σ- 代数

$\mathfrak{F}=\{\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{R}_+\}$　σ- 代数流 (§1)

$\mathfrak{F}^X=\{\mathcal{F}_t^X,t\in\mathbb{R}_+\}$　由 (随机过程)X 产生的 σ- 代数流

$\overline{\mathfrak{F}^X}=\{\overline{\mathcal{F}^X},t\in\mathbb{R}_+\}$　(随机过程)X 的自然 σ- 代数流 (定义 1.7)

$\bigvee_\alpha\mathcal{F}_\alpha$　$\sigma(\bigcup_\alpha\mathcal{F}_\alpha)$($\{\mathcal{F}_\alpha\}$ 为一族 σ- 代数)

$\bigwedge_\alpha\mathcal{F}_\alpha$　$\bigcap_\alpha\mathcal{F}_\alpha$($\{\mathcal{F}_\alpha\}$ 为一族 σ- 代数)

$\mathcal{F}_{t+}$　$\bigcap_{u>t}\mathcal{F}_u$($\{\mathcal{F}_t,t\in\mathbb{R}_+\}$ 为 σ- 代数流)

$\mathcal{F}_{t-}$　$\bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s$

$\mathcal{F}_\infty$　$\bigvee_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}_t$

$\mathcal{T}$　停时全体构成的集合 (§2)

$\mathcal{T}_f$　只取有限多个不同实数值的停时集合

$\mathcal{T}_b$　有界停时集合

$\tau|_F$　(停时)τ 在 (集合)F 上的限制 (§2)

$[[\sigma,\tau]]$　随机区间 (§2)

$[[\tau]]$ (随机时刻)τ 的图像 (§2)

$\mathcal{F}_\tau$ (停时)τ 前事件 σ- 代数 (§2)

X^τ (随机过程)X 的停止过程： $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$

$L^p(1 \le p < \infty)$ p 次幂可积随机变量构成的 Banach 空间

$\|\cdot\|_p$ L^p 中的范数： $\|\xi\|_p = (\mathbb{E}[|\xi|^p])^{1/p}$

L^∞ 本性有界随机变量构成的 Banach 空间

$L^{\infty-}$ $\bigcap_{1<p<\infty} L^p$

$\|\cdot\|_\infty$ L^∞ 中的范数： $\|\xi\|_\infty = \inf\{c; P(|\xi| > c) = 0\}$

$\mathcal{F}/\mathcal{B}$ 可测 可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到可测空间 $(E, \mathcal{B})$ 的映象 f,
若 $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 依概率收敛

$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$ 以概率 1 收敛

$\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi$ 在 L^p 中收敛

$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 测度弱收敛 (附录 C)

a.e.$[\mu]$(或 μ−a.a.) μ- 几乎处处 (或 μ- 几乎所有)

$\mathcal{B}(E)$ (拓扑空间)E 中 Borel 子集 σ- 代数

$\mathfrak{P}(\Omega)$ Ω 中一切子集全体

$\widehat{\mu}_X$ (随机过程)X 的分布 $P \circ X^{-1}$

$(\mathcal{W}, \mathcal{B}, \mu)$ Wiener 空间

$\pi(\cdot)$ $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 向 Ω 的投影

$\mathcal{R}$ 可料矩形构成的半环 (§1)

$\mathcal{I}, \mathcal{I}_f, \mathcal{I}_b$ 可料随机区间系 (§2)

$\mathcal{P}$ 可料 σ- 代数 (§1)

$\mathcal{O}$ 可选 σ- 代数 (§1)

$\mathcal{M}$ 循序 σ- 代数 (§1)

μ_X (随机过程)X 的 Doléans 测度 (§6)

$\mathfrak{M}^2$ 平方可积鞅构成的 Hilbert 空间 (§8)

$\mathfrak{M}_0^2(\mathfrak{M}_d^2, \mathfrak{M}_c^2)$ 零初值 (纯断，连续) 平方可积鞅空间 (§8)

$\mathfrak{M}_{loc}^p(1 \le p < \infty)$ 零初值局部 L^p 鞅空间 (§10)

$\mathfrak{M}_{loc}^c$ 零初值连续局部鞅空间 (§10)

$\mathcal{V}$ 零初值适应有限变差过程空间 (§11)

$\mathcal{V}_+$ 零初值适应增过程空间 (§11)

$\mathcal{H}_M^2$ Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_{M^2})$(§9)

$\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ (见定义 10.5)

$\mathcal{H}_{loc}^2, \mathcal{L}_{loc}^2$ (见定义 10.11)

$\mathcal{L}_{loc}^1$ (见定义 13.10)

$[M]$ (连续局部鞅)M 的平方变差过程 (§12)

$[M, N]$ (连续局部鞅)M, N 的交互变差过程 (§12)

$C^k(\mathbb{R}^m)$ $\mathbb{R}^m$ 上 k 次连续可微函数的空间

$C_b^k(\mathbb{R}^m)$ $\mathbb{R}^m$ 上具有直到 k 阶有界连续偏导数函数的空间

$C^\infty(\mathbb{R}^m)$ $\bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R}^m)$

$C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ $\bigcap_{k=0}^\infty C_b^k(\mathbb{R}^m)$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ 中具有紧支集函数的空间

$C_\nearrow^\infty(\mathbb{R}^m)$ $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ 中具有缓增各阶导数函数的空间

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ 中急减函数空间 (§30)

$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^m)$ Schwartz 缓增广义函数空间 (§30)

$\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^m)$ 广义函数空间 (§17)

$\mathbb{D}_s^p(E)(s \in \mathbb{R}, p \in [1, \infty))$ (Hilbert 空间)E 值 Wiener 泛函的 Sobolev 空间 (§28)

$\|\cdot\|_{p,s}^E(s \in \mathbb{R}, p \in [1, \infty))$ $\mathbb{D}_s^p(E)$ 中的范数 (§28)

$\|\cdot\|_{H.S.}$ Hilbert-Schmidt 范数 (§27, §29)

$\mathbb{D}^\infty(E), \mathbb{D}^{-\infty}(E)$ (定义见 §28)

$\|\cdot\|_B$ 赋范空间 B 中的范数

$(\cdot,\cdot)_H$ 内积空间 H 中的内积

$<\cdot,\cdot>$ $B^* \times B$ 上的典则双线性型 (B 为线性拓扑空间, B^* 为其对偶空间)

$\lesssim$ (范数) 不强于

$\sim$ (范数) 等价

$\hookrightarrow$ 连续、稠密嵌入

∂_i $\frac{\partial}{\partial x_i}(x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m), i = 1, \cdots, m$

$|\alpha|$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m(\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为多重指标)

$\alpha!$ $\alpha_1! \cdots \alpha_m!(\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m))$

x^α $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}(x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m)$

∂_α $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m}(\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m))$

现代数学基础丛书



